

平均

- 確率変数 X の「平均」(mean)
「離散型確率分布の場合」

$$E(X) = \sum_{i=1}^N x_i p_i$$

統計的計算手法

Copyright © by Takeshi Kawabata

平均 (2)

- 確率変数 X の「」()
「連続型確率分布の場合」

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

統計的計算手法

Copyright © by Takeshi Kawabata





平均 (3)

- 平均とは



⇒ 「 μ 」()


– 2乗誤差(下式)を最小化する μ



分散

- 確率変数 X の「分散」(variance)

「離散型確率分布の場合」


$$\begin{aligned} V(X) &= E((x - E(X))^2) \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - E(X))^2 p_i \end{aligned}$$

分散 (2)

- 確率変数 X の「 $V(X)$ 」()
「連続型確率分布の場合」

$$\begin{aligned} V(X) &= E((x - E(X))^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

分散 (3)

⇒ 「 $V(X) = \min_t \int_{-\infty}^{\infty} (x - t)^2 \cdot f(x) dx$ 」


$$\begin{aligned} V(X) &= \min_t \int_{-\infty}^{\infty} (x - t)^2 \cdot f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$



平均と分散


- 平均とは2乗誤差を最小化する値

⇒ 「 \quad 」 「 \quad 」


$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

- 分散とはそのときの最小2乗誤差の値

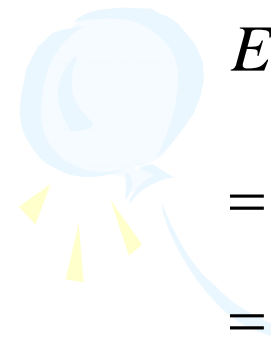
⇒ 「 \quad 」 「 \quad 」


$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$$



平均と分散 (2)

- 確率変数 $aX+b$ の平均 (a, b は定数)


$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) \cdot f(x) dx$$


$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

=



平均と分散 (3)

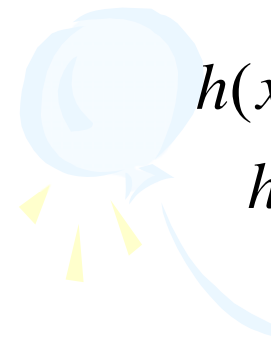
- 確率変数 $aX+b$ の分散 (a, b は定数)


$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b - aE(X) - b)^2 \cdot f(x) dx \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx \\ &= \end{aligned}$$



平均と分散 (4)

- 独立性
 - 独立な確率変数 X と Y に対し次式が成立


$$h(x, y) = f(x)g(y)$$

$$h(x, y)$$

$$f(x)$$

$$g(y)$$

平均と分散 (5)

- 確率変数 $X+Y$ の平均 (X, Y は独立)

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} (x + y)h(x, y) dx dy \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} (x + y)f(x)g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) dy \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

統計的計算手法

Copyright © by Takeshi Kawabata

平均と分散 (6)

- 確率変数 $X+Y$ の分散 (X, Y は独立)

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} (x + y - (\mu_x + \mu_y))^2 \cdot h(x, y) dx dy \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \{(x^2 + y^2 + (\mu_x + \mu_y)^2 + 2xy - 2x(\mu_x + \mu_y) - 2y(\mu_x + \mu_y))\} \cdot h(x, y) dx dy \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \{(x - \mu_x)^2 + (y - \mu_y)^2 + (x - \mu_x)(y - \mu_y)\} \cdot h(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 g(y) dy + \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)h(x, y) dx dy \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

統計的計算手法

Copyright © by Takeshi Kawabata

平均と分散 (7)

- 確率変数 X, Y の分散 (X, Y は独立)

$$V(X - Y)$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - y - (\mu_x - \mu_y))^2 \cdot h(x, y) dx dy$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} \{(x^2 + y^2 + (\mu_x - \mu_y)^2 - 2xy - 2x(\mu_x + \mu_y) + 2y(\mu_x + \mu_y))\} \cdot h(x, y) dx dy$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} \{(x - \mu_x)^2 + (y - \mu_y)^2 - (x - \mu_x)(y - \mu_y)\} \cdot h(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 g(y) dy - \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) h(x, y) dx dy$$

=

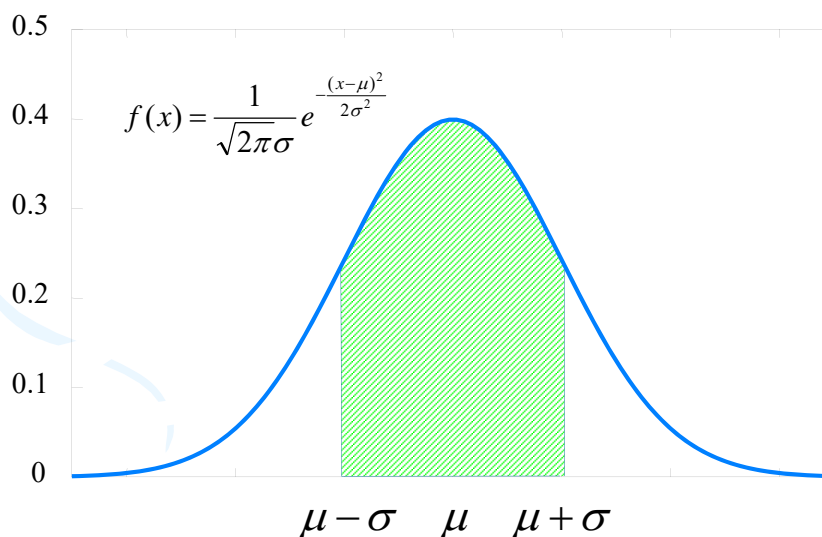
=

統計的計算手法

Copyright © by Takeshi Kawabata

平均と分散 (8)

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の平均と分散



統計的計算手法

Copyright © by Takeshi Kawabata