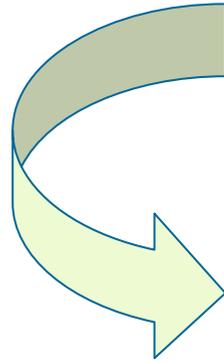


シグナル プロセッシング

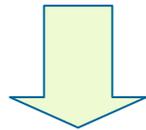
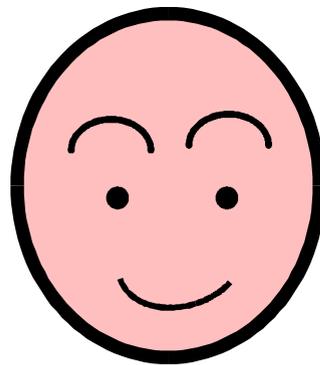
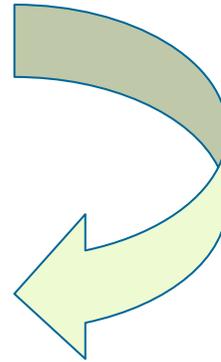
関西学院大学 理工学部
2003年度秋学期
教授 川端 豪

【補足事項】 講義の進め方

1. 見て



2. 聞いて



3. 書いて 覚える

【補足事項】 講義の進め方

0. 復習 (前回のノートを見ながら思い出す)

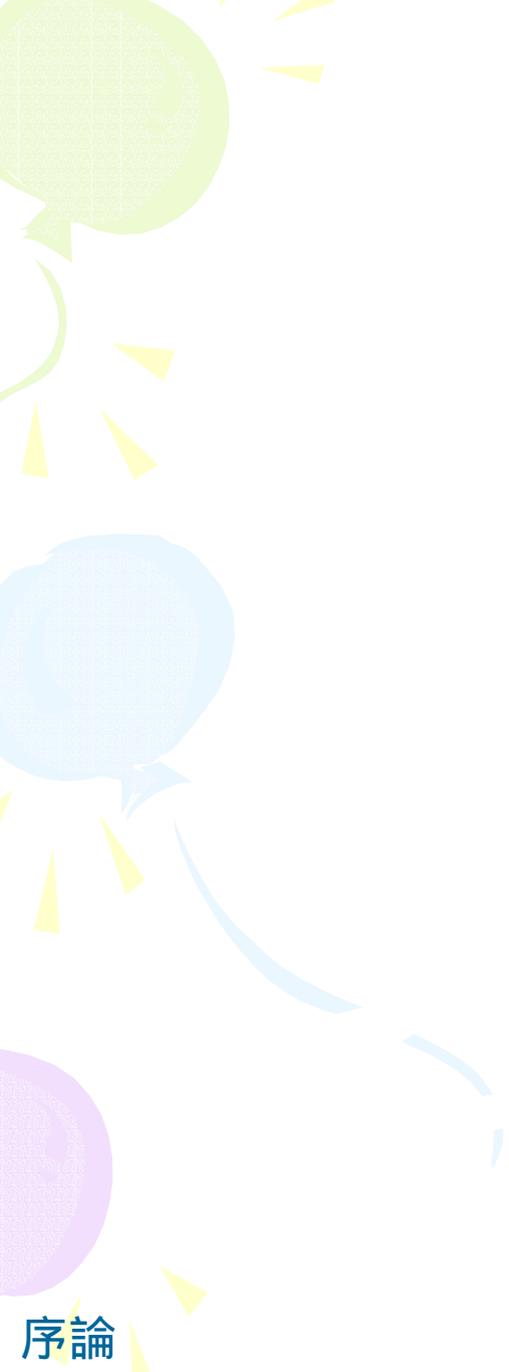
スライドごとに1～3を繰り返す

1. スライドを見る

2. スライドの説明を聞く

3. 理解した内容をノート (説明は中断)

この間はノート
せずに話を聞く



第一章 序論

シグナルプロセッシング

- 本講義で扱うのは、

「Digital Signal Processing」

- 本講義の目標

コンピュータによる音声処理・画像処理のベースとなる、デジタル信号処理の基礎理論を習得。時間と周波数の間の密接な関係を直感的に知る。

信号とは何か？

- 信号 (signal) : 情報を運ぶ物理量
(例) 光、音、電気信号

情報 = 信号によって運ばれる抽象概念

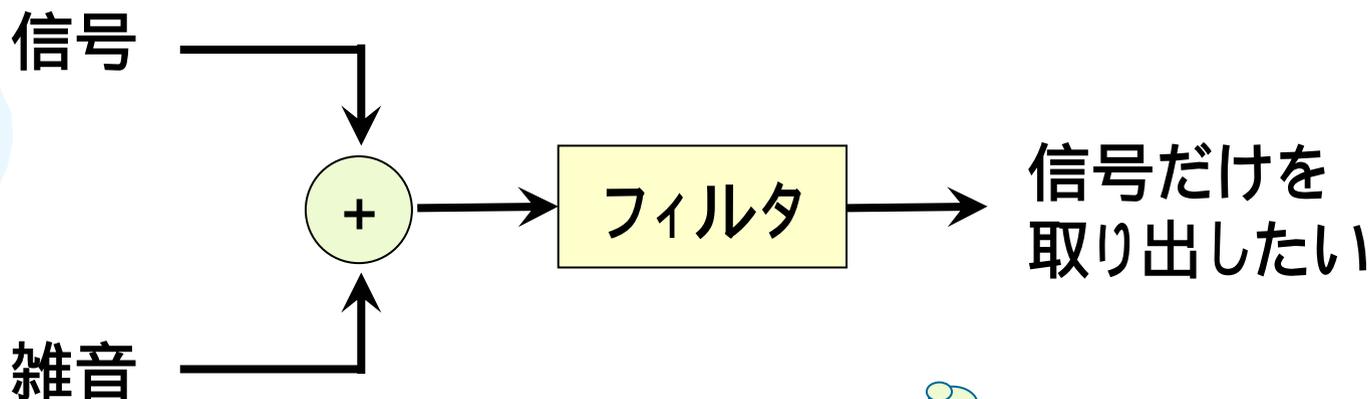
➡ 情報理論 本講では論じない

信号 = 具体的に観測できる物理現象

➡ 信号理論

ウィナーの信号理論

• ウィナー (Wiener) フィルタ



- 高品質の音声通信
- 脳波・地震波の解析

まだ
アナログの
世界

デジタル信号処理

- 信号を、数値(データ)化することで、コンピュータによる信号処理が行える。

振幅の数値化

➡ 誤差論 本稿では論じない

時間の数値化

➡ 離散時間の理論 (デジタル信号処理)

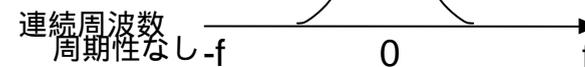
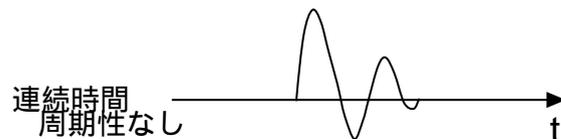
本講義の目標 (1)

- デジタル信号における「時間と周波数」の関係を直感的に理解。

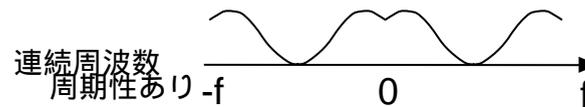
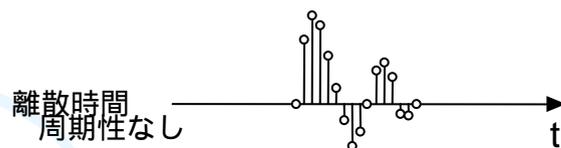
(A) フーリエ級数



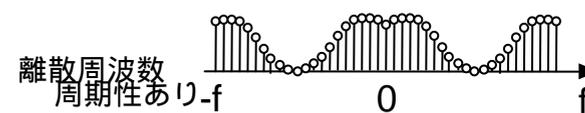
(B) フーリエ変換



(C) z-変換



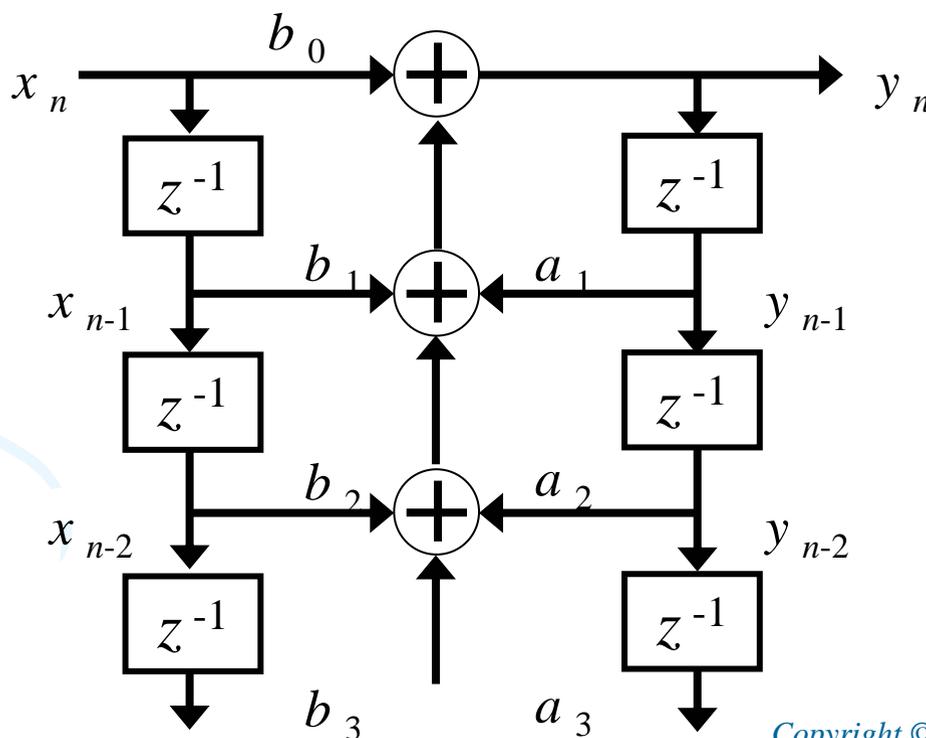
(D) 離散的フーリエ変換



本講義の目標 (2)

- 「デジタルフィルタ」(コンピュータによる信号フィルタ)の概念を学ぶ。

入力
信号



出力
信号

どういう領域に適用できるか？

- 生理学、医用工学
- 音響学、ソナー、レーダー
- 地震学
- データ通信、メディア通信
- 音声認識、合成
- 画像認識、CG

more ...

講義の進め方

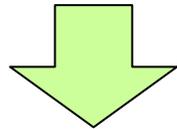
- コンピュータによる音声処理・画像処理のベースとなる、デジタル信号処理の基礎理論を講義。時間と周波数の関係を直感的に理解。
- より深い理解のために「微分積分学Ⅰ」を習得しておくことが望ましい。
- 視聴覚機器と板書を併用して講義を進める。
- 定期試験に出席状況を加味し総合評価。

参考書

- 萩原将文著
『デジタル信号処理』
(森北出版、2001)。
- 宮川、城戸他著
『デジタル信号処理』
(電子情報通信学会編、1975)。

オフィスアワー

- 授業内容についてもっと質問したい。
- 授業の進め方について意見がある。
- その他、いろいろ相談したい。



- 2003年度秋学期は、毎週水曜日 III限、川端教授室(IV-3F-32)、部屋の前の白板に注意

主なトピック

- 序論(0)
- 基礎概念(1)
- フーリエ級数(2)
- フーリエ変換(3)(4)
- z-変換と離散フーリエ変換(5)(6)
- 時間窓と周波数スペクトル(7)
- サンプリング定理(8)
- 時間窓と周波数スペクトル(9)
- デジタルフィルタ (10)(11)(12)



第二章 基礎概念

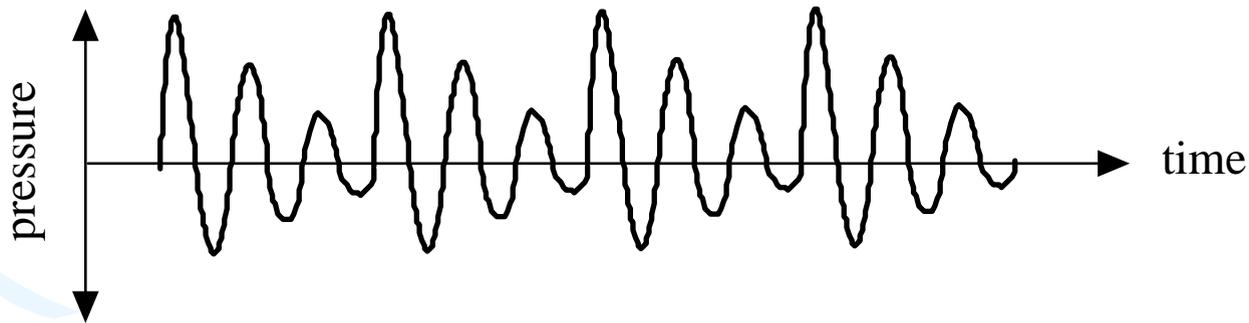
基礎概念

- 音声とは？ 画像とは？
- デジタル信号処理
- 時間の離散化
 - 標本化(サンプリング)
- 周期、周波数、角周波数

音声とは？ 画像とは？

- 音声とは

- (主として) 空気の弾性振動
- 圧力を振幅にとって「波形」表示

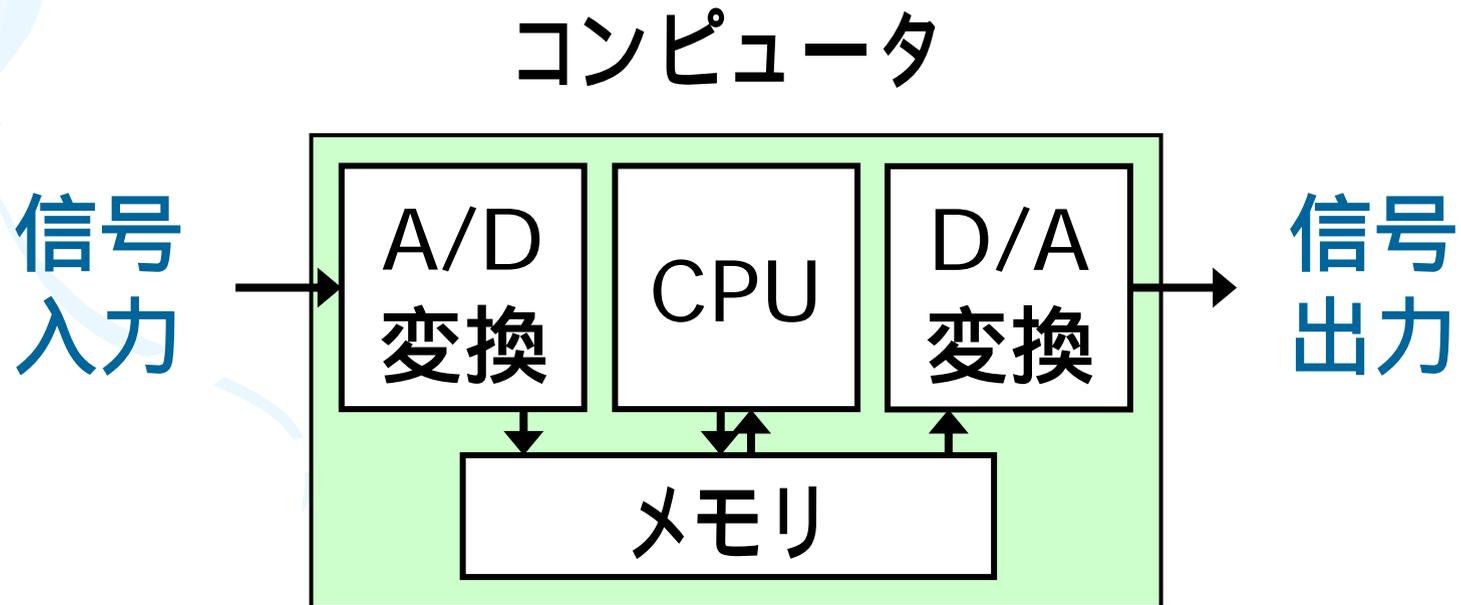


- 画像とは

- 電磁波、2次元信号、高分解能

デジタル信号処理

- 信号を、数値(データ)化することで、コンピュータによる信号処理が行える。



デジタル信号処理 (2)

- 信号を、数値(データ)化することで、コンピュータによる信号処理が行える。

振幅の数値化

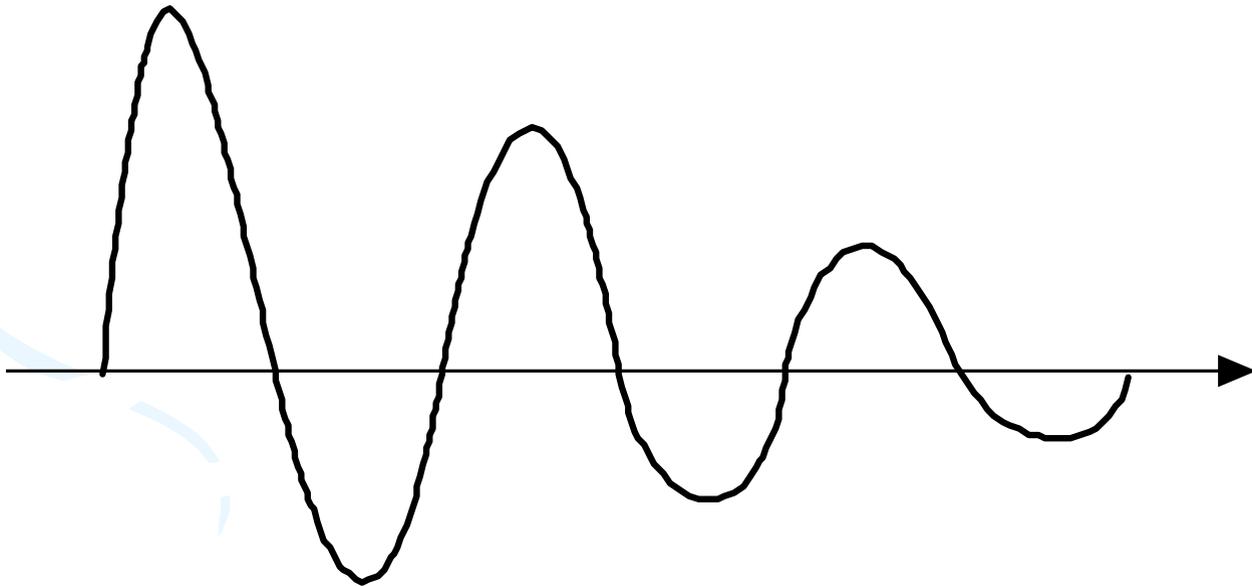
➡ 誤差論 本講では論じない

時間の数値(離散)化

➡ 離散時間の理論 (デジタル信号処理)

時間の離散化

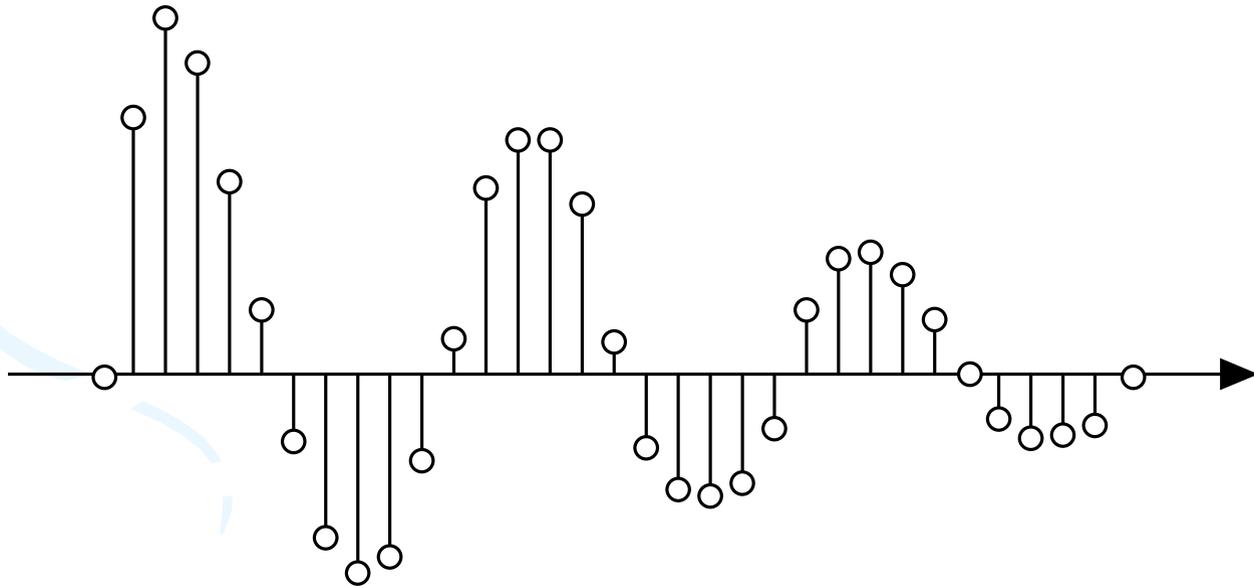
- 標本化(サンプリング)
(例) 音声波形のサンプリング



時間の離散化 (2)

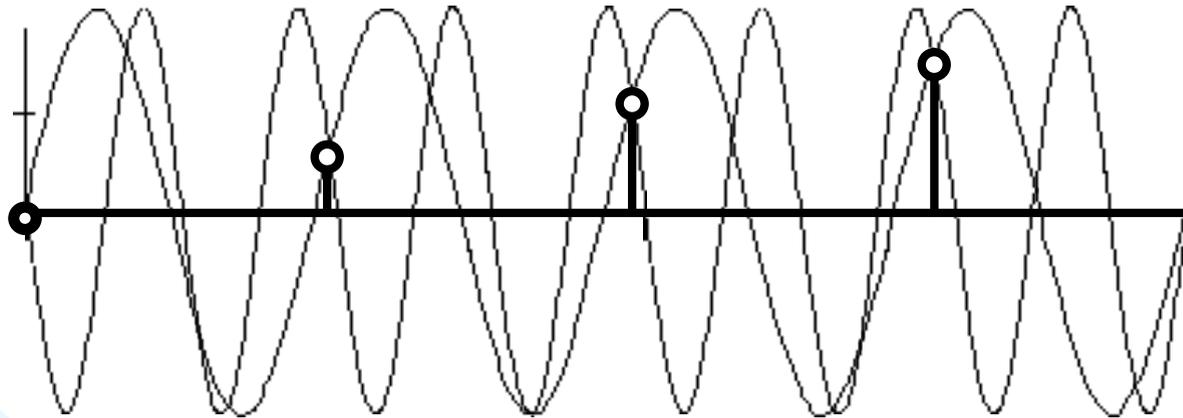
- 標本化(サンプリング)

一定の時間間隔で音声波形の振幅を測定
波形を数値の列に変換

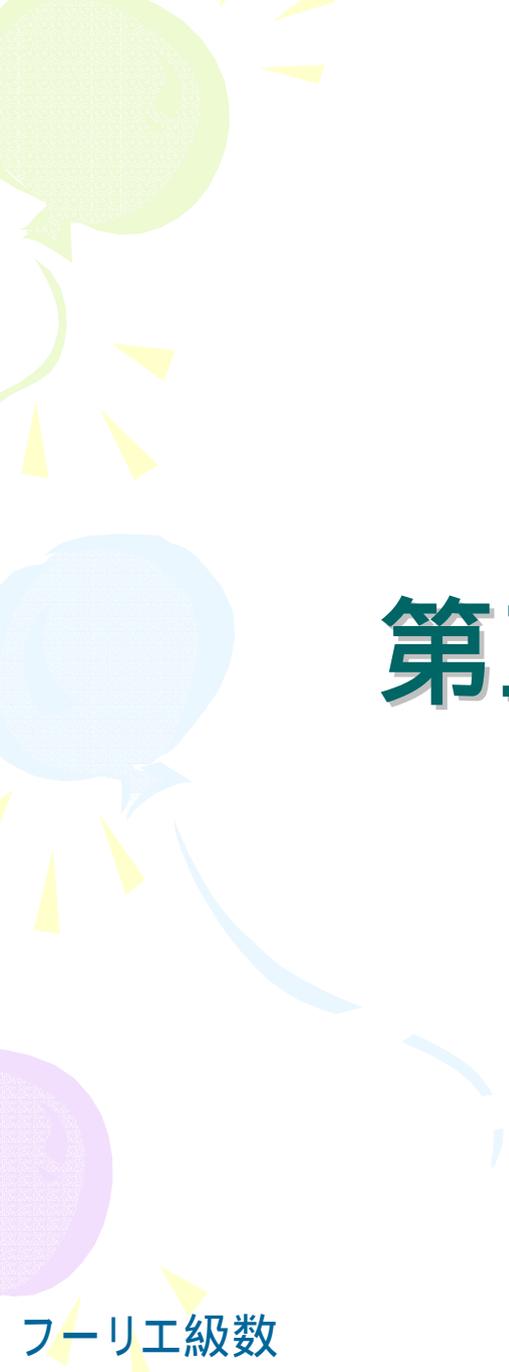


時間の離散化 (3)

- 標本化の非可逆性に注意



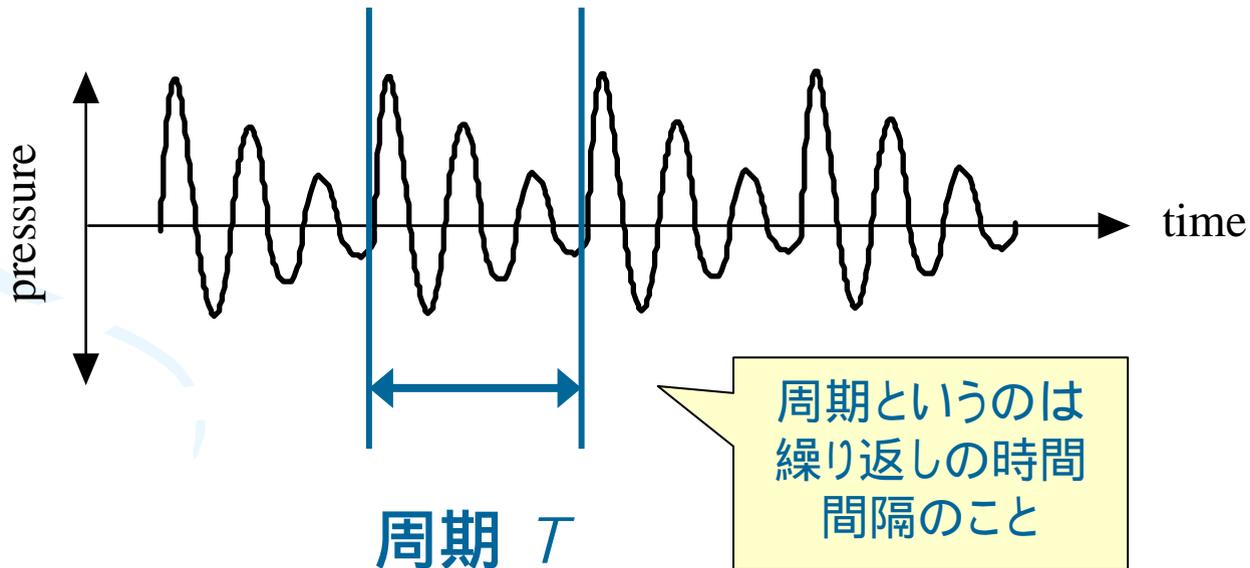
異なる波形が同じ数値系列
に変換される。



第三章 フーリエ級数

信号って何だったかな？

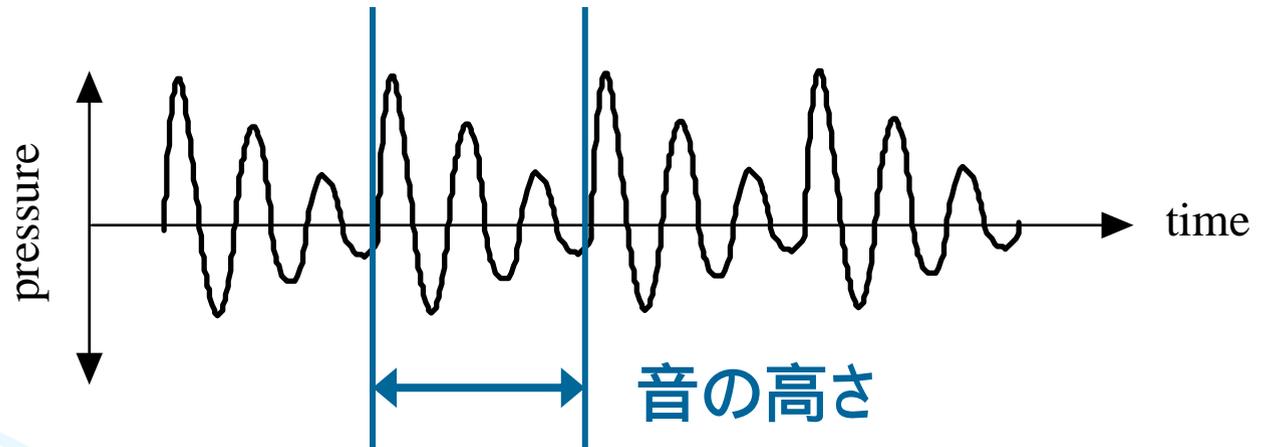
- たとえば音声は
 - (主として) 空気の弾性振動
 - 圧力を振幅にとって「波形」表示



音の三要素

- 大きさ
- 高さ

振幅の大きさ



- 音色

「音色」を決めるのは何か？

周期、周波数、角周波数

- 周期

$$T \text{ [s]}$$

(period)

- 基本周波数

$$f_0 = \frac{1}{T} \text{ [Hz]}$$

(fundamental frequency)

- 基本角周波数

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{1}{T} \text{ [rad/s]}$$

(fundamental angular frequency)

フーリエ級数

- フーリエ級数 (Fourier series)

「任意の周期波形はその周波数及びその整数倍周波数の余弦波・正弦波の和に展開できる」

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} t + b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} t \right)$$

フーリエ級数 (2)

- フーリエ級数 (Fourier series)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} t + b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} t \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos 2\pi \frac{n}{T} t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin 2\pi \frac{n}{T} t dt$$

パワーと位相

$$a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} t + b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} t = A_n \cos \left(2\pi \frac{n}{T} t - \gamma_n \right)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

An^2 をパワー
と呼ぶ

: Power

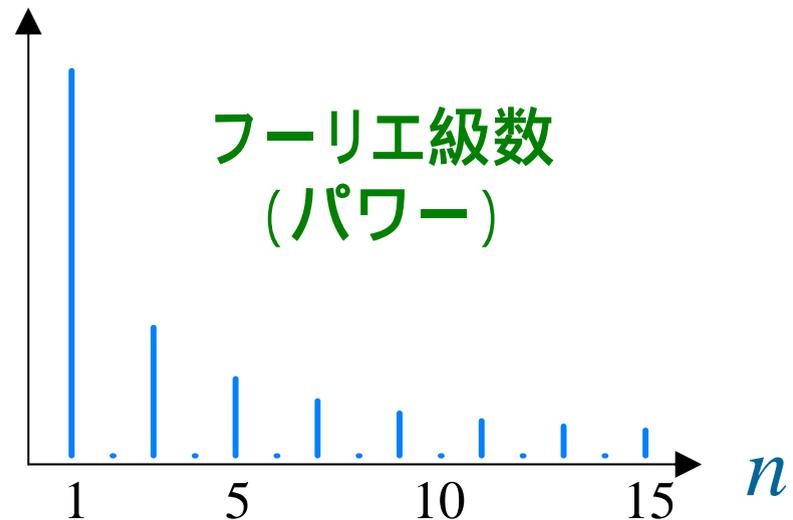
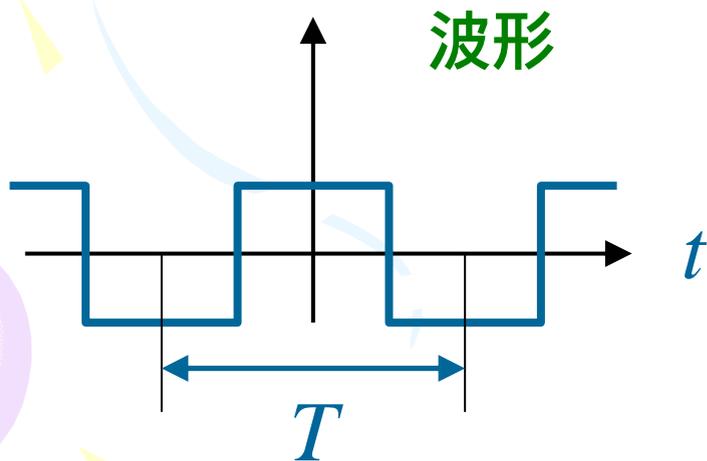
$$\gamma_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

n を位相と呼
ぶ

: Phase

音色とフーリエ級数

- 倍音 (harmonics)
 - ある周波数及び整数倍周波数の正・余弦波
- 「音色」は倍音のパワー概形で決まる



フーリエ級数と複素指数関数

- 複素数
- 複素数の加法
- 複素数の乗法

フーリエ級数と複素指数関数 (2)

- 複素関数

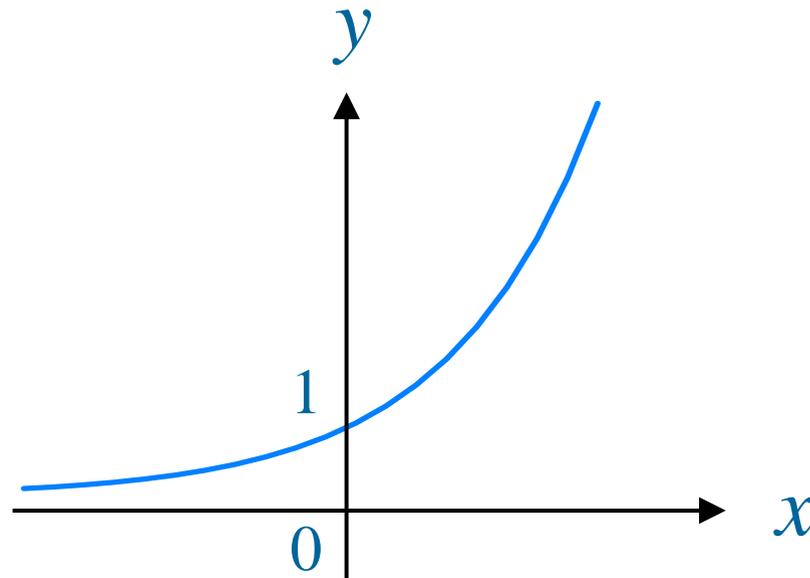
- 定義域、値域が複素数である関数

- 複素指数関数

$$\exp(x + jy) \equiv \exp(x)(\cos y + j \sin y)$$

【補足】(実)指数関数

$$y = \exp(x) \quad (= e^x)$$



フーリエ級数と複素指数関数 (3)

- オイラーの公式

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (\exp(j\theta) + \exp(-j\theta))$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (\exp(j\theta) - \exp(-j\theta))$$

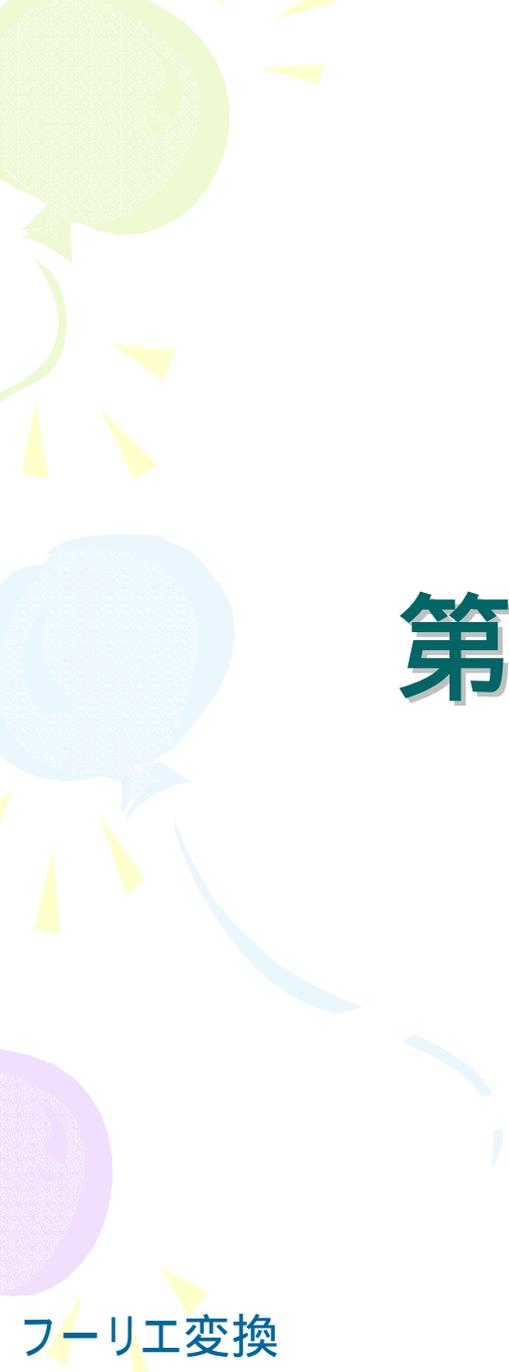
フーリエ級数と複素指数関数 (4)

- フーリエ級数の複素指数関数による表現

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j 2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j 2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$$



第四章 フーリエ変換

フーリエ変換

- 任意の周期波形はその周波数及びその整数周波数の余弦波・正弦波の和に展開できる

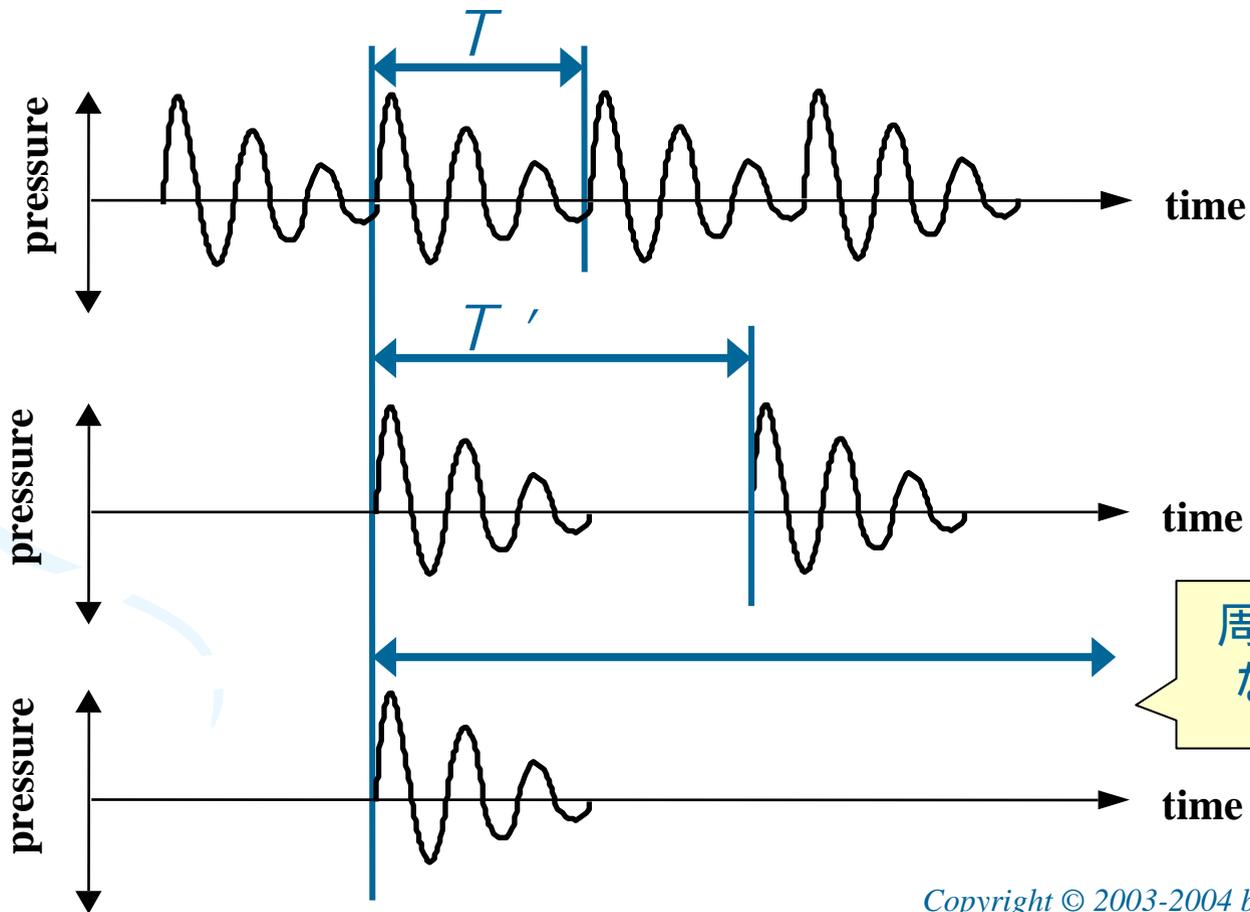
フーリエ級数

- 波形に周期性がない場合は？

フーリエ変換

思考実験

- 同じ波形で周期を長くする T



周期性が
なくなる

フーリエ変換の導出

- フーリエ級数の複素指数関数による表現

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j 2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j 2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$$

フーリエ変換の導出 (2)

- c_n を代入

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j 2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j 2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \right] \right.$$

$$\left. \exp\left(j 2\pi \frac{n}{T} t\right) \right\}$$

フーリエ変換の導出 (3)

- 変数変換 $\Delta\omega = 2\pi / T$

$$x(t) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j n \Delta\omega t) dt \right] \exp(j n \Delta\omega t) \right\}$$

フーリエ変換の導出 (4)

- 極限をとる $T \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$,

n

$$x(t) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j \omega t) dt \right] \exp(j \omega t) d\omega$$

フーリエ変換の導出 (5)

- フーリエ変換 (Fourier Transform)

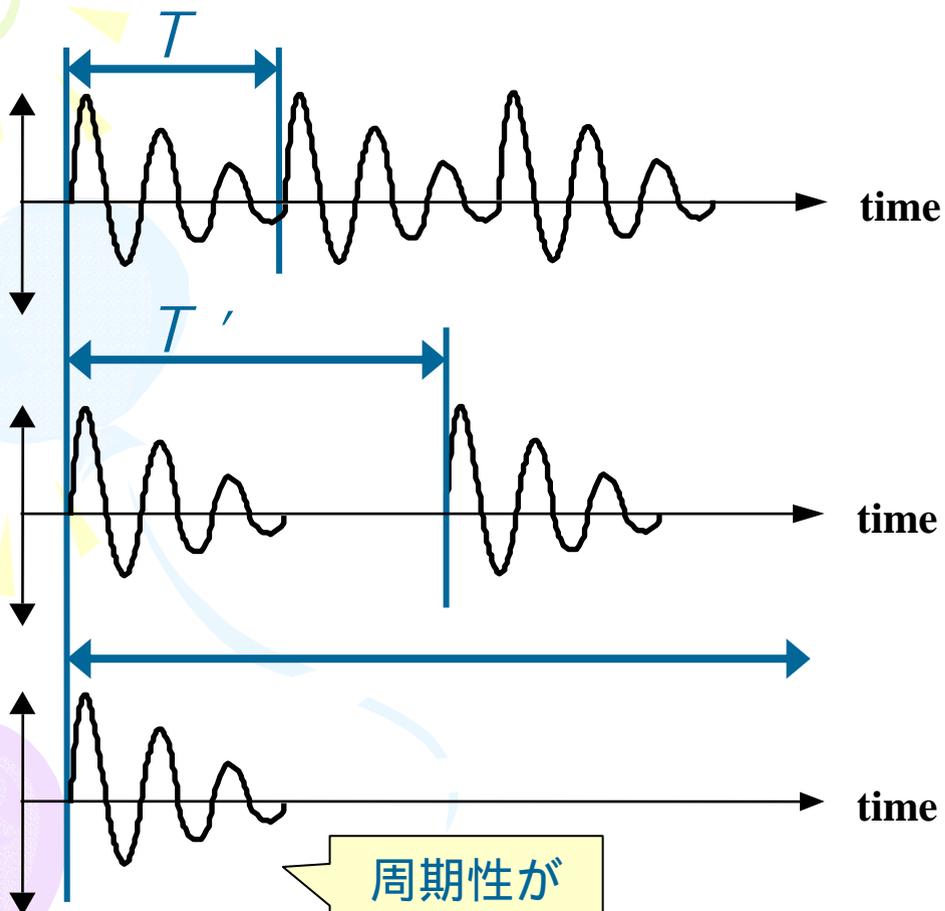
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

逆フーリエ
変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

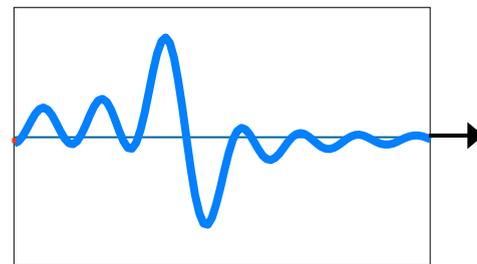
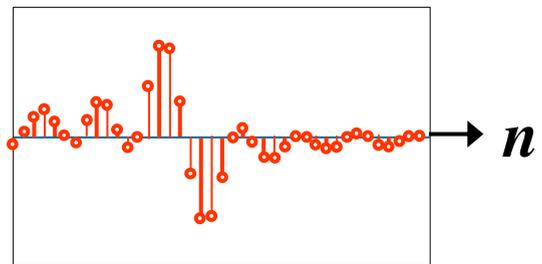
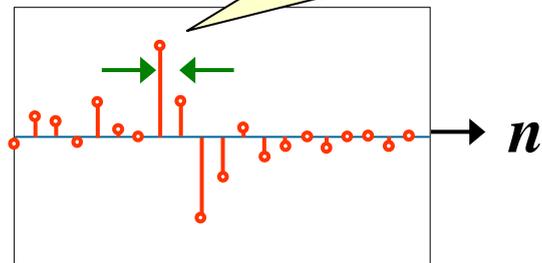
フーリエ
変換

周期を長くすると



周期性が
なくなる

$$(\quad = 2 \quad / T)$$



フーリエ変換

フーリエ変換の記号

- フーリエ変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j \omega t) dt \quad \equiv \mathcal{F}[x(t)]$$

- 逆フーリエ変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j \omega t) d\omega$$
$$\equiv \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$$

パワーと位相

- フーリエ変換は「複素関数」である
実数 に対し複素数の値をとる

(1) 実数部と虚数部の組で表す

または

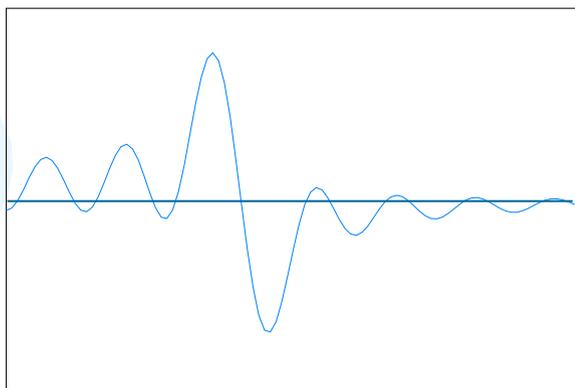
(2) パワーと位相の組で表す

- 信号のスペクトル (Spectrum) 表現

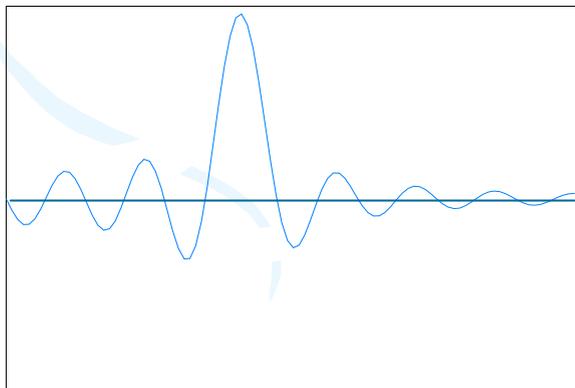
パワーと位相 (2)

- トーンバースト波形のスペクトル表現

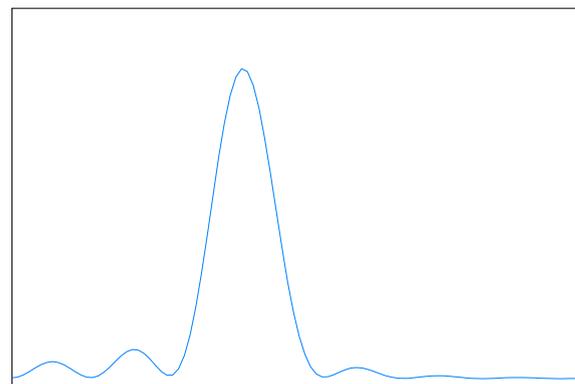
Real



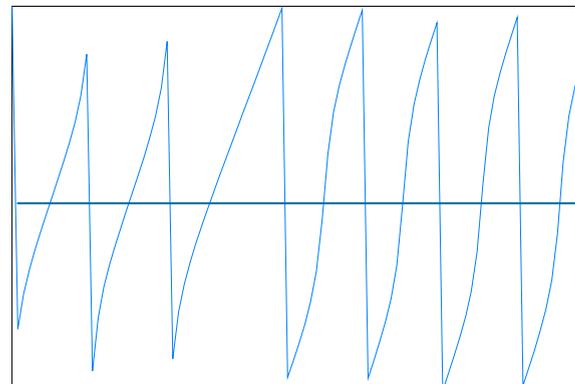
Imaginary



Power



Phase



フーリエ変換

1kHz

0

1kHz

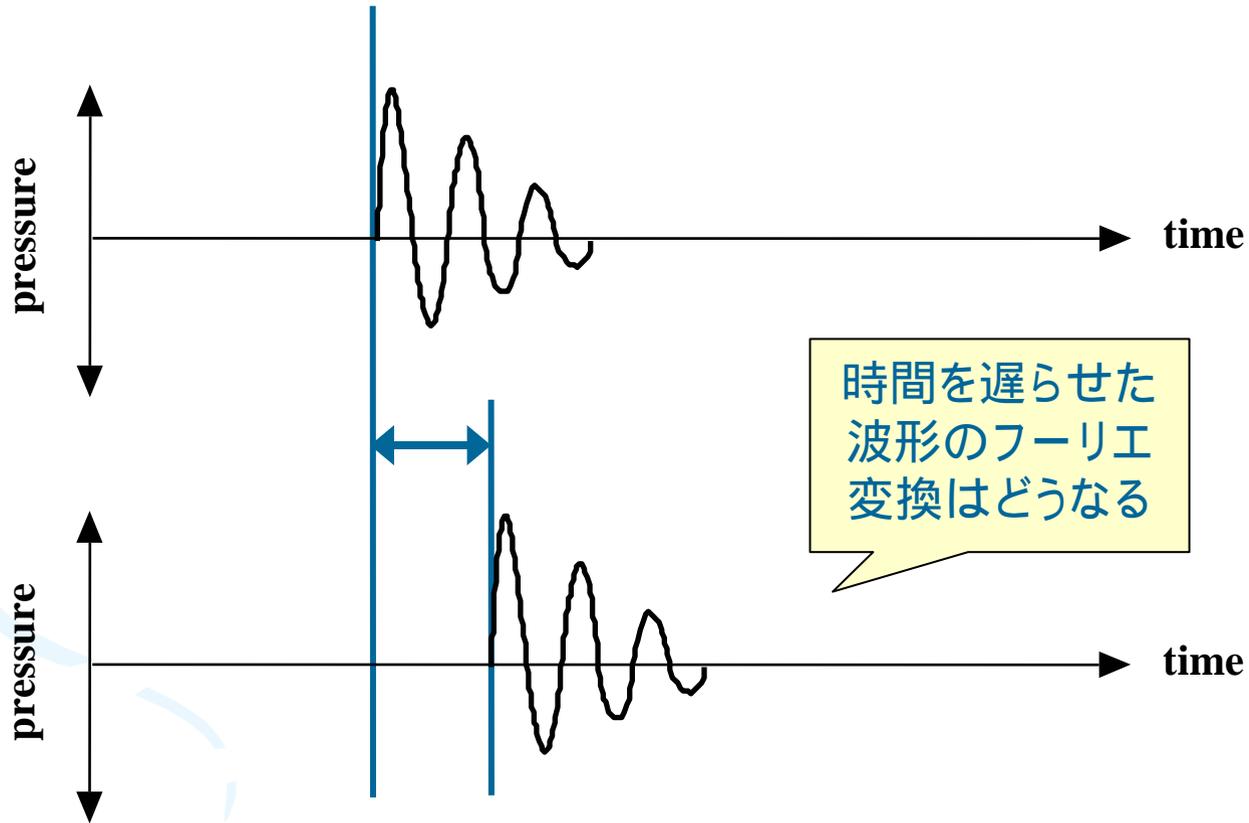
$$\exp(j \omega t)$$

- 導出されたフーリエ変換を特徴づける要素

$$\exp(j \omega t) \quad ,$$
$$\exp(-j \omega t)$$

にはどういう意味があるのか？

時間遅れとフーリエ変換



時間遅れとフーリエ変換 (2)

- 波形 $x(t - \tau)$ のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[x(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \exp(-j \omega t) dt$$

$$= \exp(-j \omega \tau) \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \exp(-j \omega(t - \tau)) dt$$

$$= \exp(-j \omega \tau) \mathcal{F}[x(t)]$$

フーリエ変換の世界での時間遅れを表す

フーリエ変換とフーリエ級数

- 連続スペクトル、線スペクトル

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

= $2n\pi/T$
を代入

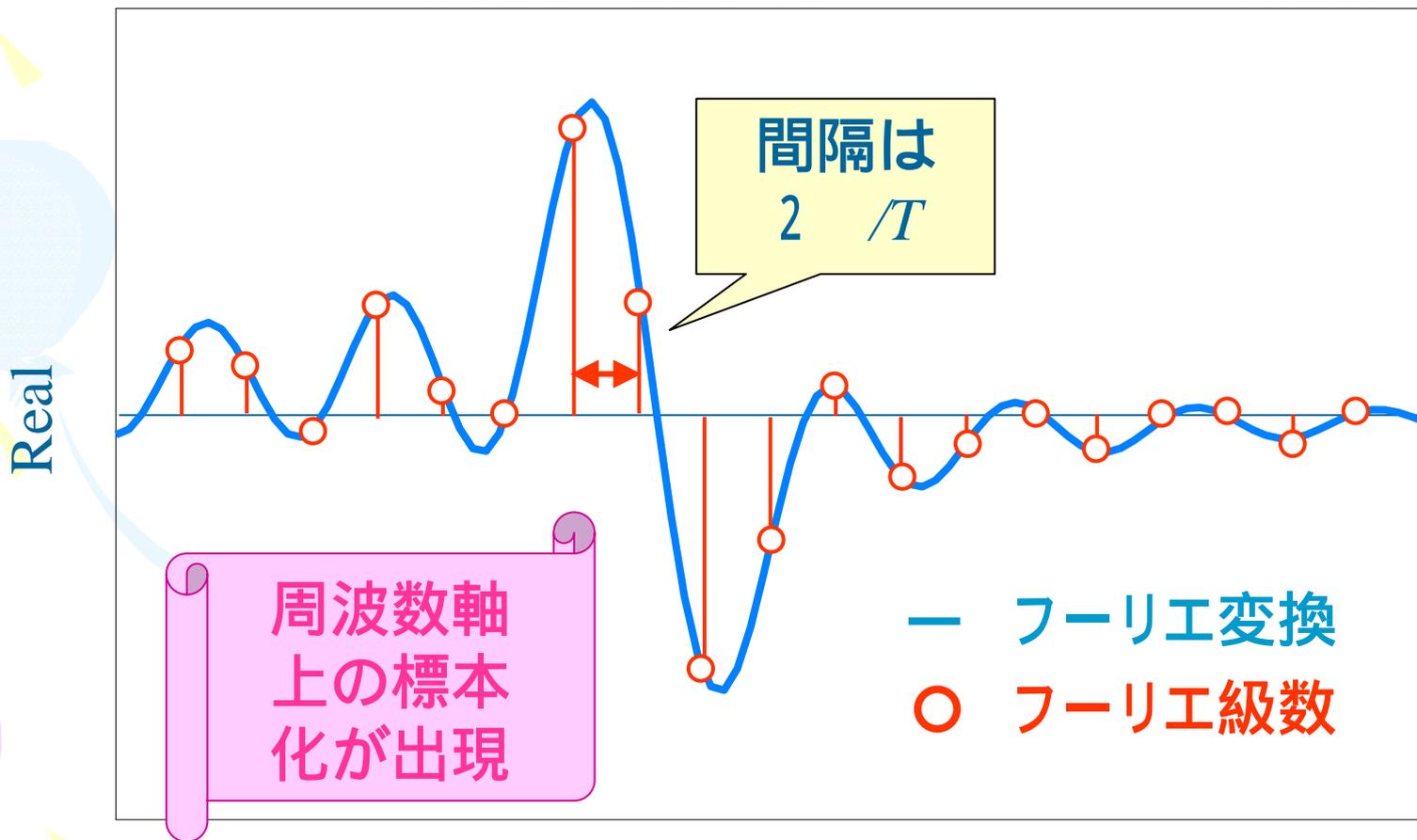
$$X\left(\frac{2n\pi}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(-j\frac{2n\pi}{T}t\right) dt$$

定係数 ($1/T$) を
除いて一致

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2n\pi}{T}t\right) dt = \frac{1}{T} X\left(\frac{2n\pi}{T}\right)$$

フーリエ変換とフーリエ級数 (2)

- フーリエ変換を標本化
- フーリエ級数

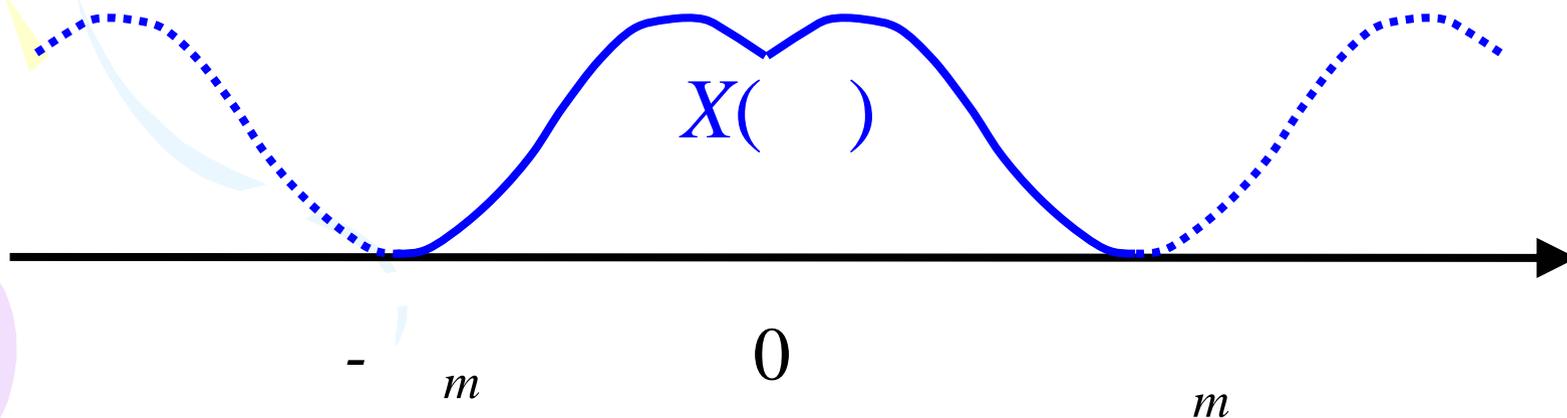




第五章 z -変換とDFT

z -変換(準備)

- スペクトルの帯域制限とそのフーリエ級数
 - スペクトルの帯域を制限
 - 仮想的な繰り返しを導入



z -変換(準備) (2)

- $X(\quad)$ を繰り返し波形とみてフーリエ級数を求める

$$x(t) \Rightarrow X(\omega)$$

$$t \Rightarrow \omega$$

$$T \Rightarrow 2\omega_m$$

$$n \Rightarrow -p$$

z -変換(準備) (3)

- $X(\omega)$ のフーリエ級数

$$X(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \exp\left(-j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right)$$

$$c_p = \frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(\omega) \exp\left(j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right) d\omega$$

z -変換(準備) (4)

- $X(\omega)$ のフーリエ級数
 $2\omega_m \cdot c_p \quad x_p$ と変数変換

$$X(\omega) = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \exp\left(-j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right)$$

$$x_p = \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(\omega) \exp\left(j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right) d\omega$$

z-変換(準備) (5)

- $X(\omega)$ のフーリエ級数

$$X(\omega) = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \exp\left(-j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right)$$

$$x_p = \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(\omega) \exp\left(j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right) d\omega$$

$x(t)$ のフーリエ変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j \omega t) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j \omega t) d\omega$$

$$x_p = 2\pi \cdot x\left(\frac{\pi}{\omega_m} \cdot p\right)$$

時間の標本化

- スペクトルを帯域制限し、周波数軸上で繰り返す

時間軸上に離散(標本)化が出現

$$x_p = 2\pi \cdot x \left(\frac{\pi}{\omega_m} \cdot p \right)$$

これが n と p の
符号を反転させ
ておいた理由

なお、因果性を考えて $p \geq 0$ とする。

「z」の導入

- $X(\omega)$ のフーリエ級数の式に z を導入

$$z \equiv \exp\left(j \frac{\pi}{\omega_m} \omega\right)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \exp\left(-j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right)$$

$$X(z) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p \cdot z^{-p}$$

係数変更

因果性より $p \geq 0$

「 z 」の導入 (2)

- $X(\omega)$ のフーリエ級数の式に z を導入

$$z \equiv \exp\left(j \frac{\pi}{\omega_m} \omega\right)$$

$$x_p = \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(\omega) \exp\left(j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right) d\omega$$

$$= \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \frac{1}{2\omega_m} X(z) \cdot z^p d\omega$$

「z」の導入 (3)

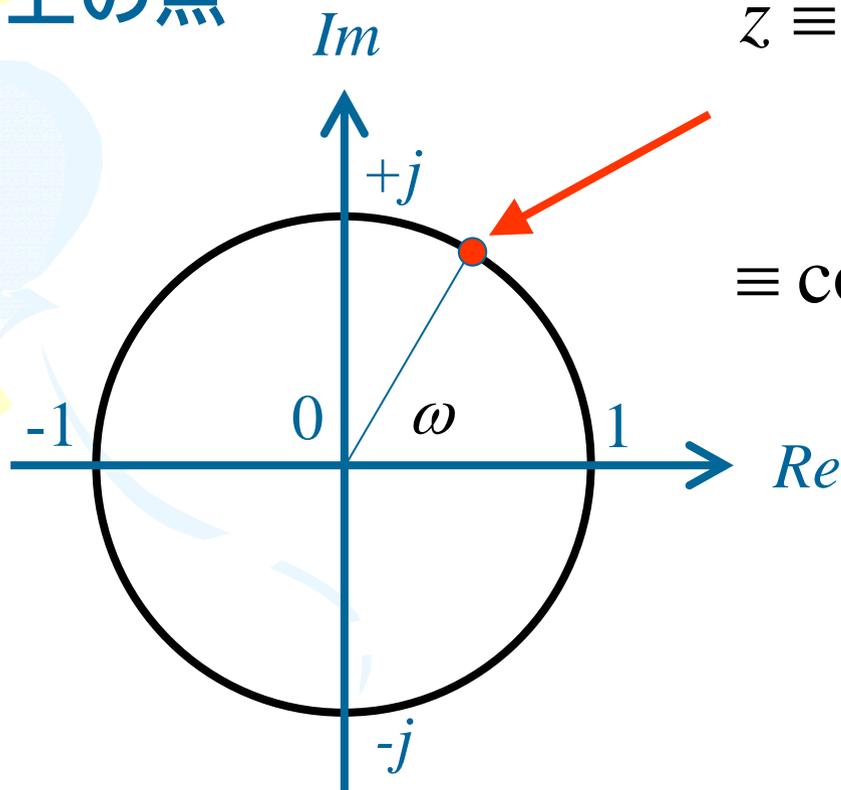
- 積分変数の変更

$$z \equiv \exp\left(j \frac{\pi}{\omega_m} \omega\right) \Rightarrow d\omega = -j \frac{\omega_m}{\pi} z^{-1} dz$$

$$\begin{aligned} x_p &= \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \frac{1}{2\omega_m} X(z) \cdot z^p d\omega \\ &= -\frac{1}{j 2\pi} \oint X(z) \cdot z^{p-1} dz \end{aligned}$$

「z」の導入 (4)

- z は複素平面の単位円上の点



$$z \equiv \exp\left(j \frac{\pi}{\omega_m} \omega\right)$$
$$\equiv \cos\left(\frac{\pi}{\omega_m} \omega\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\omega_m} \omega\right)$$

z-変換

- z-変換 (z-Transform)

$$X(z) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p \cdot z^{-p}$$

- 逆 z-変換

$$x_p = \frac{1}{j 2\pi} \oint X(z) \cdot z^{p-1} dz$$

「 z 」とは何か？

- 思い出そう

「 $\exp(-j \quad)$ は時間遅れ」

- ならば、

$$z^{-1} = \exp\left(-j \frac{\pi}{\omega_m} \omega\right)$$

は、 $= \quad / \quad m$ の時間遅れを意味する。

「z」とは何か？ (2)

- z-変換の世界では「時間軸上の標本化」が起きている

- 標本化周期

$$T_s (= \pi / \omega_m)$$

- 標本化周波数

$$f_s = 1/T_s (= \omega_m / \pi)$$

- 標本化角周波数

$$\omega_s = 2\pi f_s (= 2\omega_m)$$

z-変換の記号

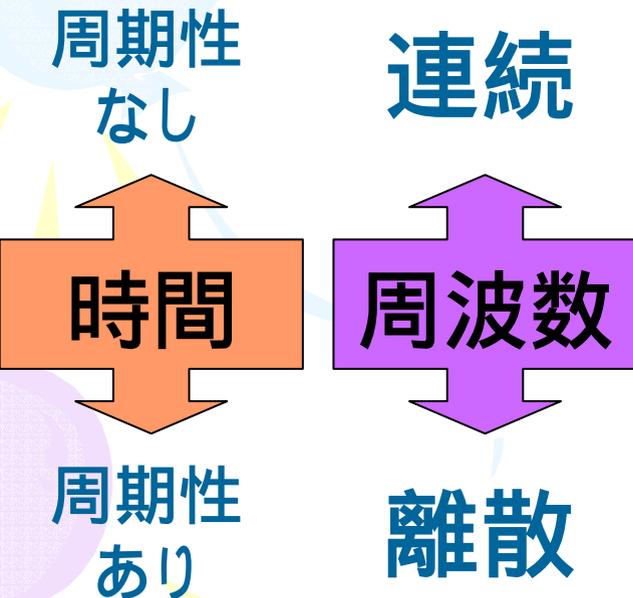
- z-変換

$$X(z) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p \cdot z^{-p} \quad (\equiv Z[x_p])$$

- 逆 z-変換

$$x_p = -\frac{1}{j 2\pi} \oint X(z) \cdot z^{p-1} dz \quad (\equiv Z^{-1}[X(z)])$$

周期性と離散化



フーリエ変換	z -変換
フーリエ級数	DFT

離散フーリエ変換

- DFT (Discrete Fourier Transform)
 - 時間軸上でも周波数軸上でも、周期的かつ離散的な値をとる。

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_p \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right)$$

$$x_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right)$$

高速フーリエ変換

- FFT (Fast Fourier Transformation)
離散フーリエ変換を高速に計算するアルゴリズム
- 理論的には $N = r^m$ と書ける任意の r, m に適用可能だが、実際にはほとんど $r = 2$ が用いられる
- 詳細は参考書



第六章

時間窓と周波数スペクトル

離散化の代償

- コンピュータで信号処理をするためには時間及び周波数領域における離散化が必要

- 時間の離散化

周波数の繰り返し (LPFによる帯域制限)

サンプリング
定理

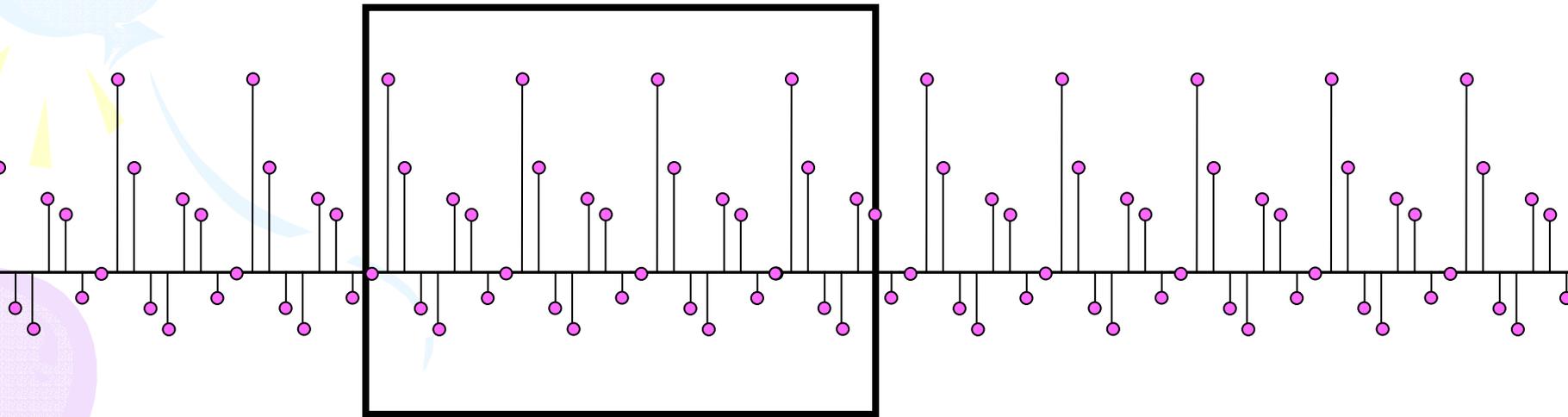
- 周波数の離散化

時間の繰り返し (無限回の繰り返しは非現実的)

時間窓

- 無限回の繰り返しは非現実的

有限の時間範囲(「時間窓」)で周波数分析すると何が起きるのか？



時間窓 (2)

- 無限に繰り返す離散波形

$$x(p)$$

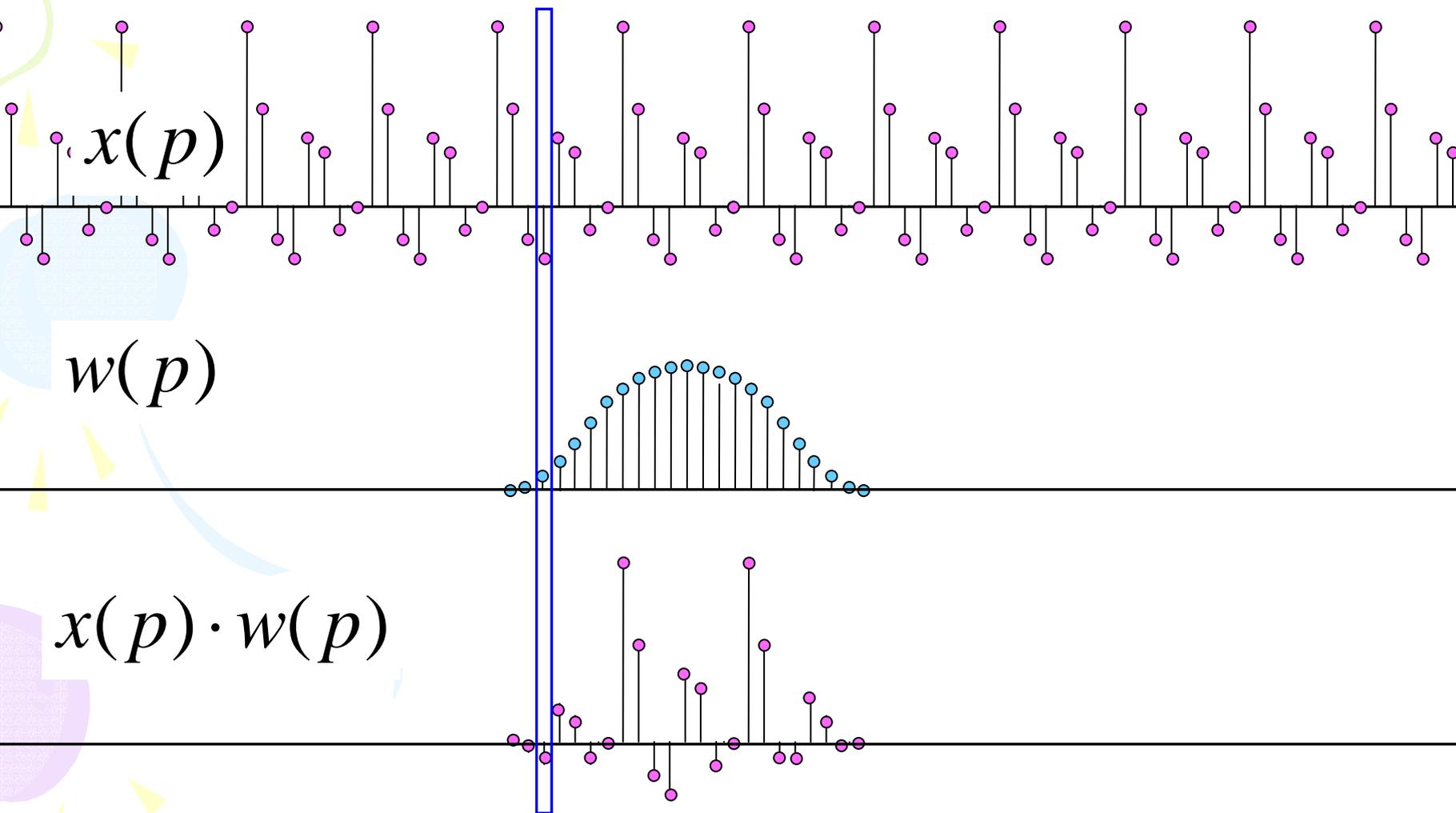
- (時間)窓関数 (time window function)

$$w(p)$$

- 窓関数によって切り出された波形

$$x(p) \cdot w(p)$$

時間窓 (3)



時間窓 (4)

- 波形とそのスペクトル

$$x_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right), \quad X_k = \sum_{p=0}^{N-1} x_p \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right)$$

- 窓関数とそのスペクトル

$$w_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k \exp\left(j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right), \quad W_k = \sum_{p=0}^{N-1} w_p \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right)$$

時間窓 (5)

- 窓関数によって切り出された波形

$$x_p \cdot w_p$$

のスペクトルは

$$G_k = \sum_{p=0}^{N-1} x_p w_p \exp(-j \frac{2\pi}{N} p \cdot k)$$

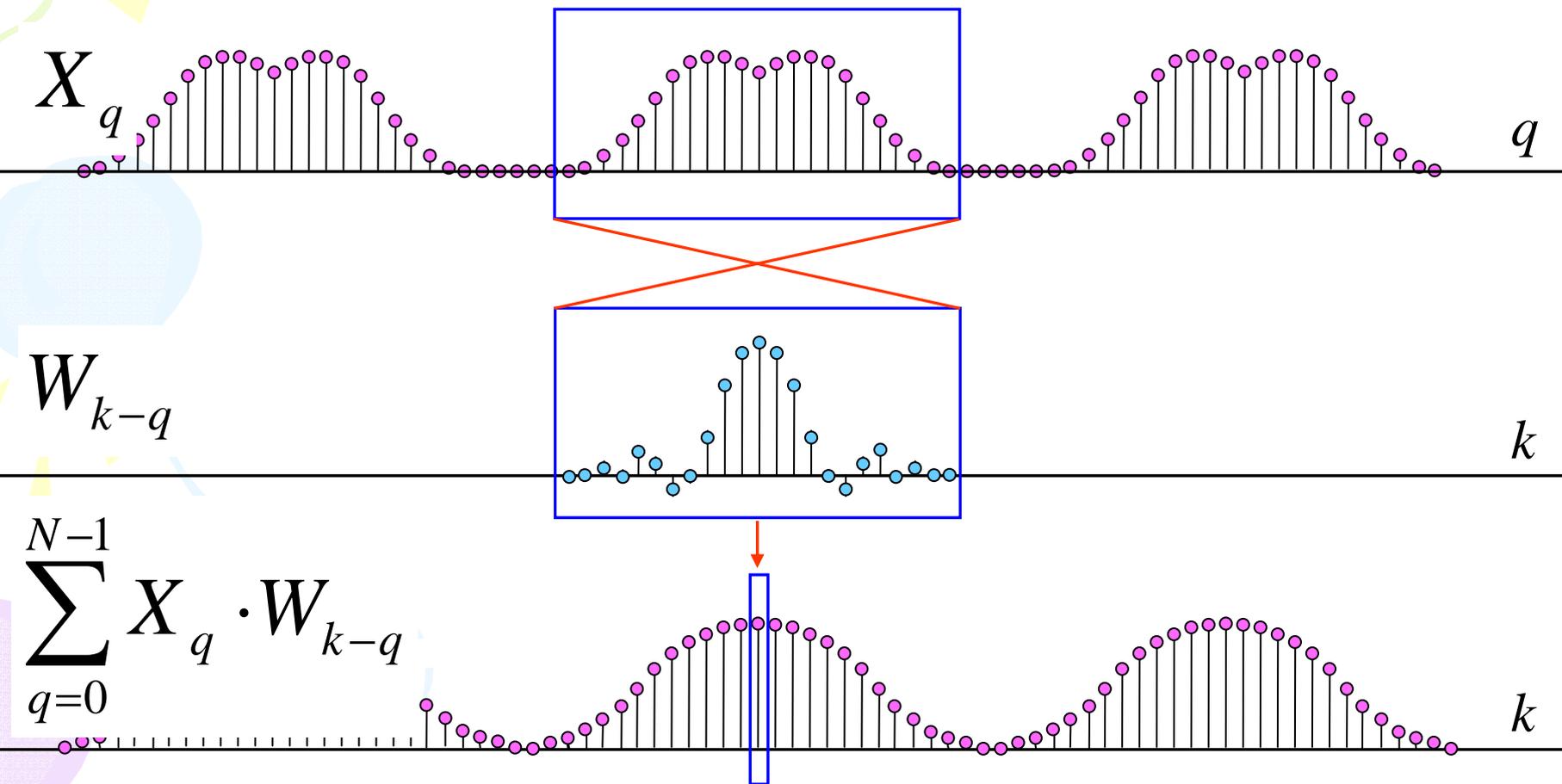
= ...

$$= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q \cdot W_{k-q}$$

たたみ込み(convolution)計算という

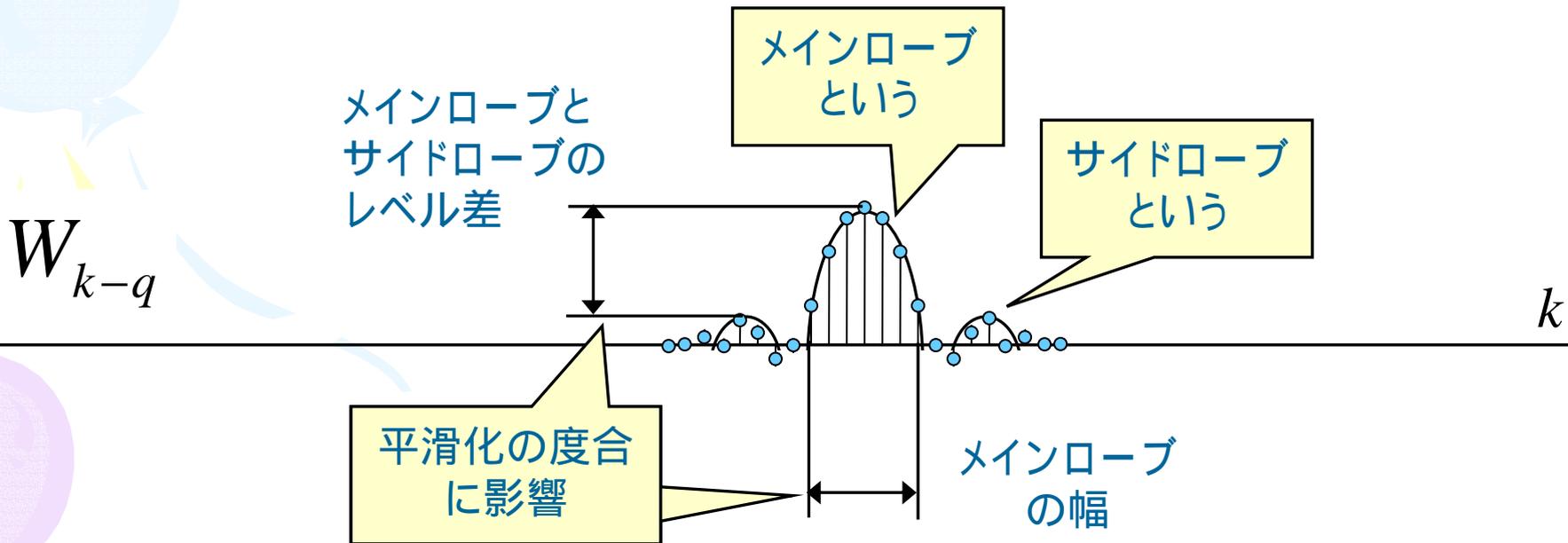
自習課題:
左式を導出
しなさい

たたみ込み計算



たたみ込み計算 (2)

- 窓関数とのたたみ込みにより、周波数スペクトルの平滑化が起こる



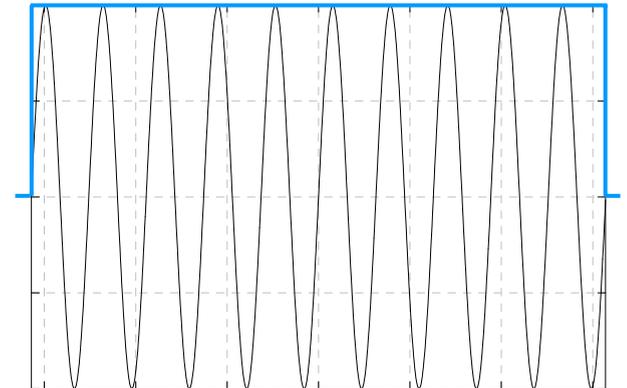
いろいろな窓関数 (1)

- 方形窓 (rectangular window)

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2}T < n \cdot T_s < \frac{1}{2}T) \\ 0 & (else) \end{cases}$$

T は窓の長さ

T_s はサンプリング周期



いろいろな窓関数 (2)

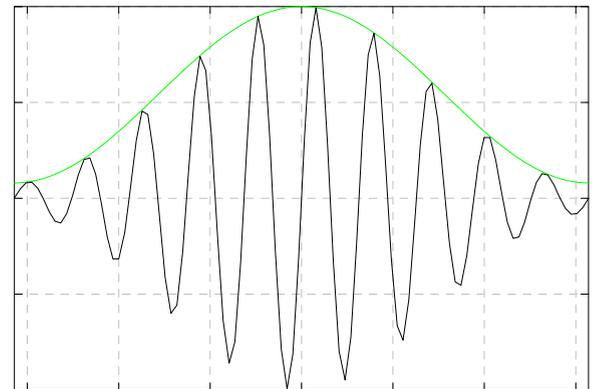
- ハミング窓 (Hamming window)

$$w_M(n) = 0.54 + 0.46 \cos\left(2\pi \frac{n \cdot T_s}{T}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}T < n \cdot T_s < \frac{1}{2}T\right)$$

T は窓の長さ

T_s はサンプリング周期



いろいろな窓関数 (3)

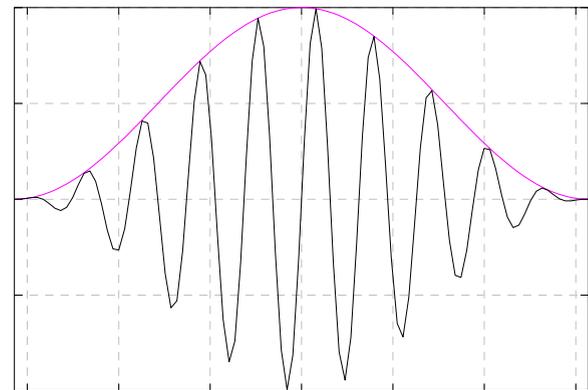
- ハニング窓 (Hanning window)

$$w_N(n) = 0.5 + 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n \cdot T_s}{T}\right)$$

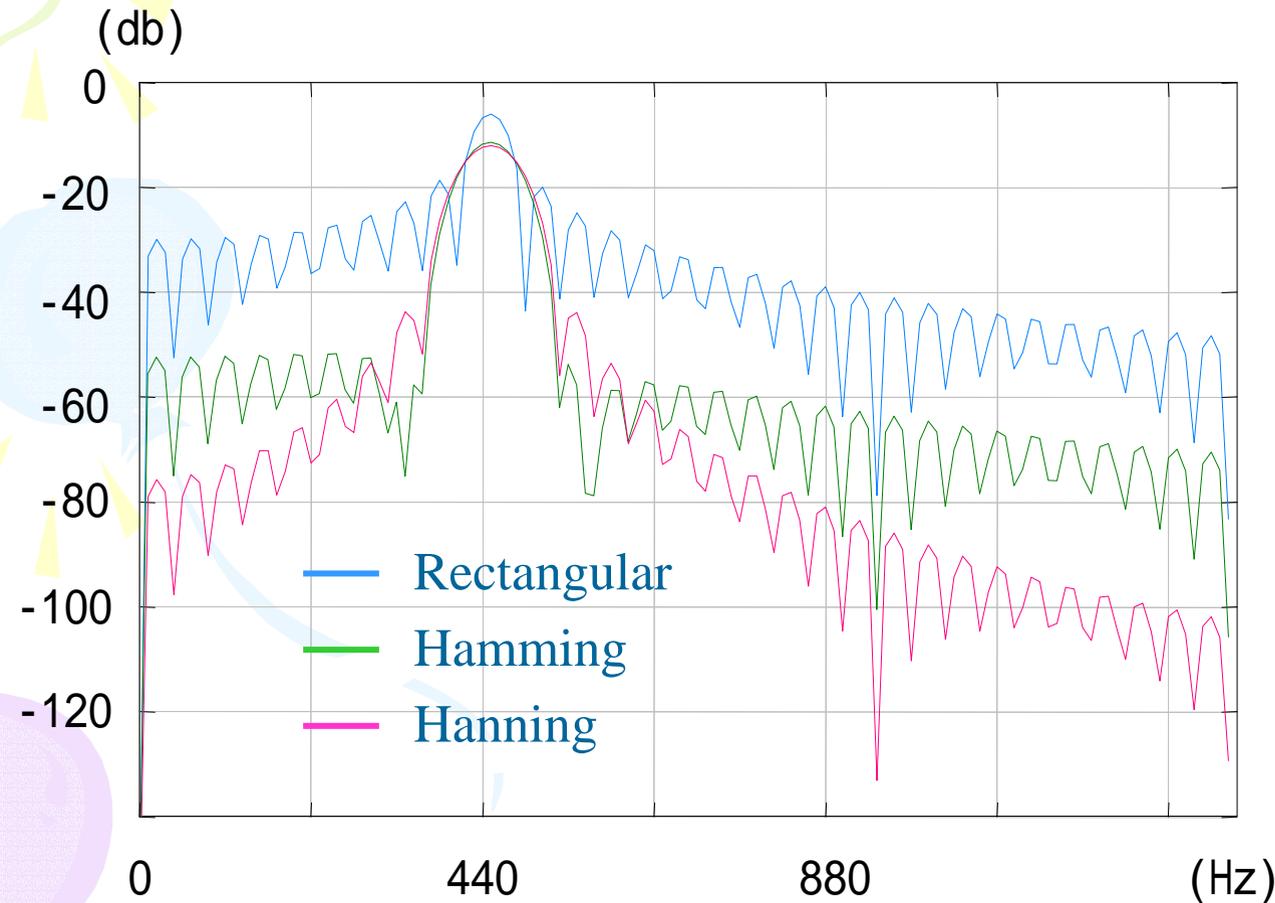
$$\left(-\frac{1}{2}T < n \cdot T_s < \frac{1}{2}T\right)$$

T は窓の長さ

T_s はサンプリング周期



窓関数の周波数平滑特性



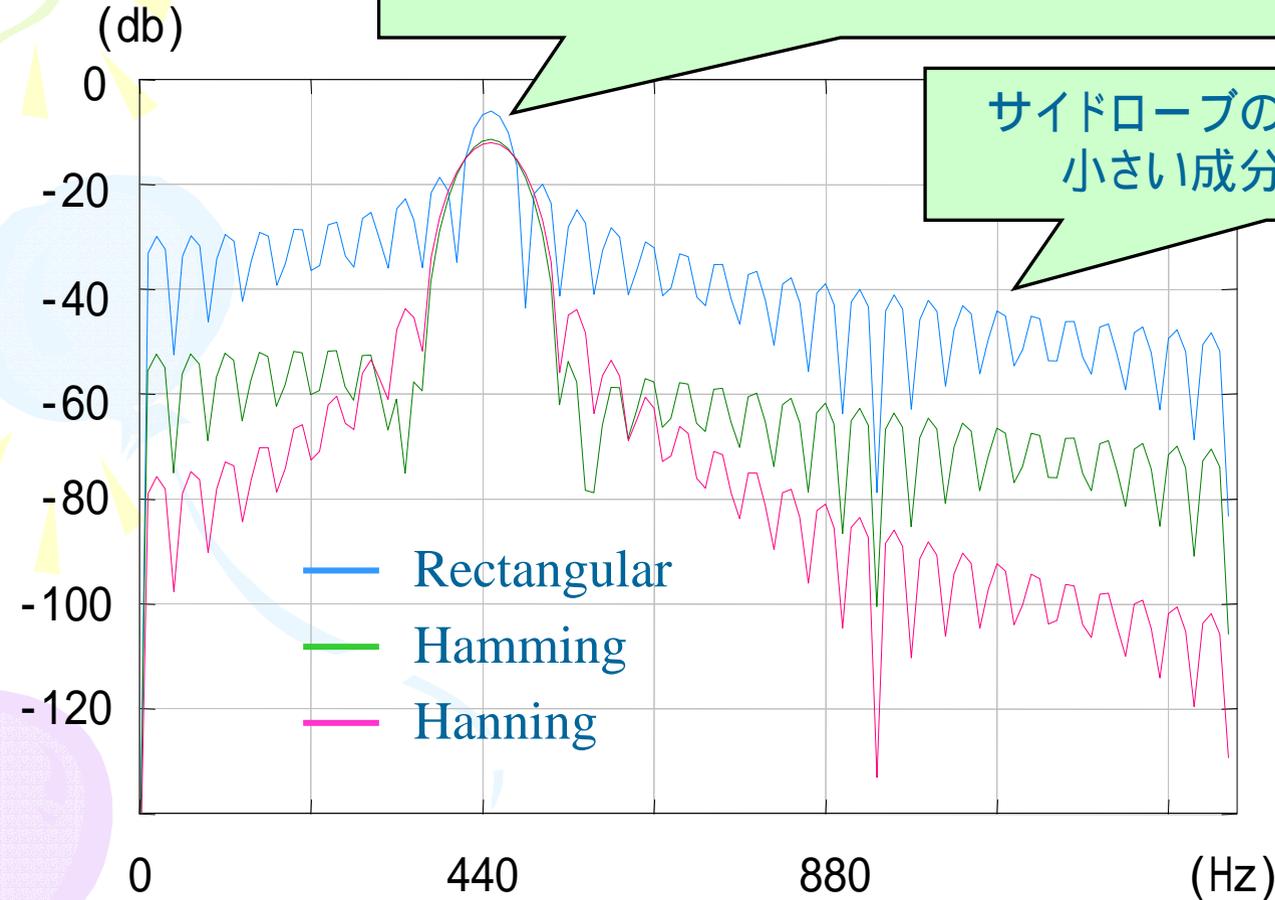
440Hzの
正弦波に
各種時間
窓をかけ
て周波数
分析

方形窓の特徴

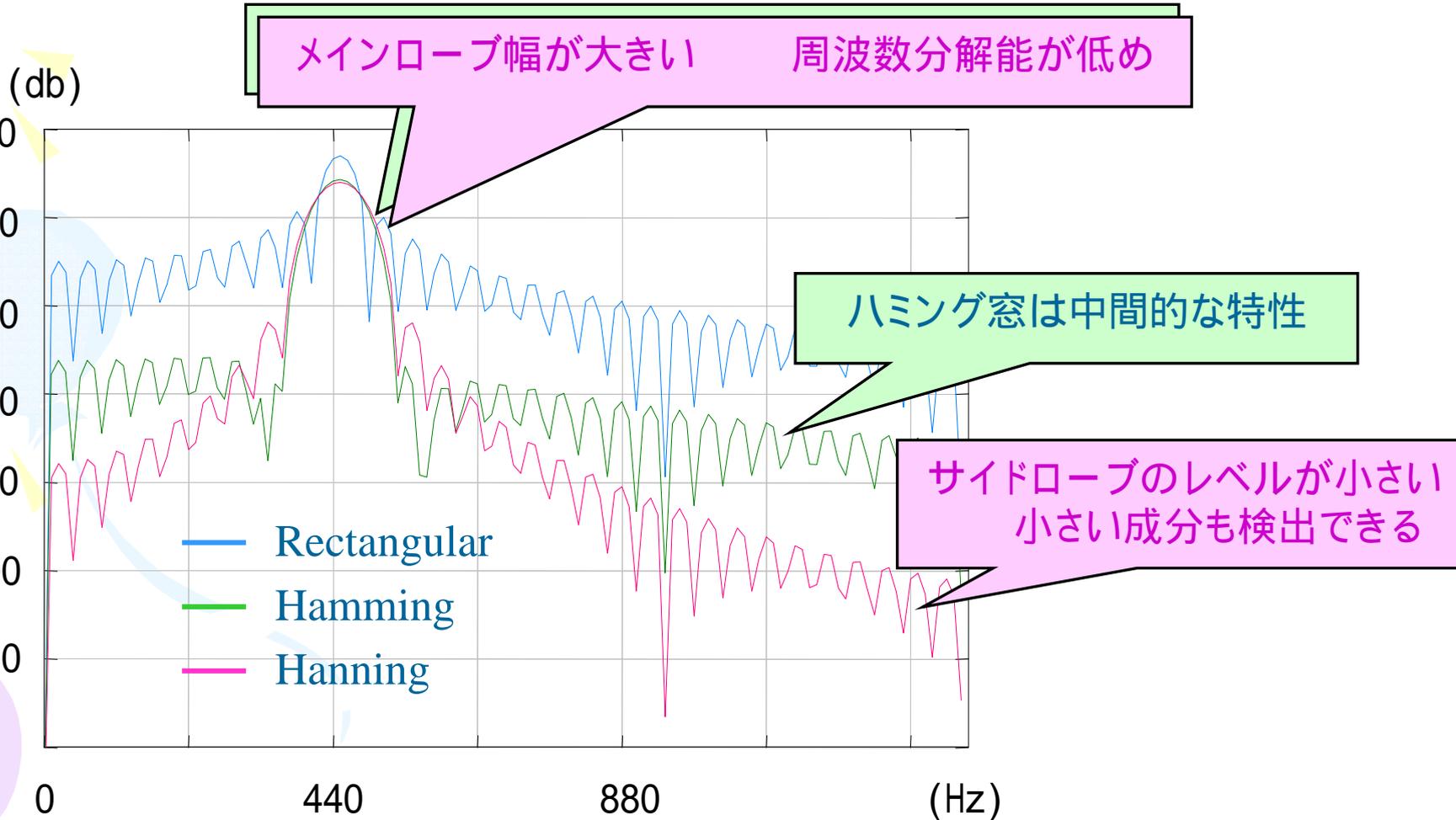
メインローブ幅が小さい

周波数分解能が高い

サイドローブのレベルが大きい
小さい成分が埋もれやすい



ハミング & ハニング窓の特徴



メインローブ幅が大きい

周波数分解能が低め

ハミング窓は中間的な特性

サイドローブのレベルが小さい
小さい成分も検出できる

— Rectangular
— Hamming
— Hanning

離散化の代償 (2)

- コンピュータで信号処理をするためには時間及び周波数領域における離散化が必要

- 時間の離散化

周波数の繰り返し (LPF)

代償:
周波数帯域
が制限される

- 周波数の離散化

時間の繰り返し (時間窓)

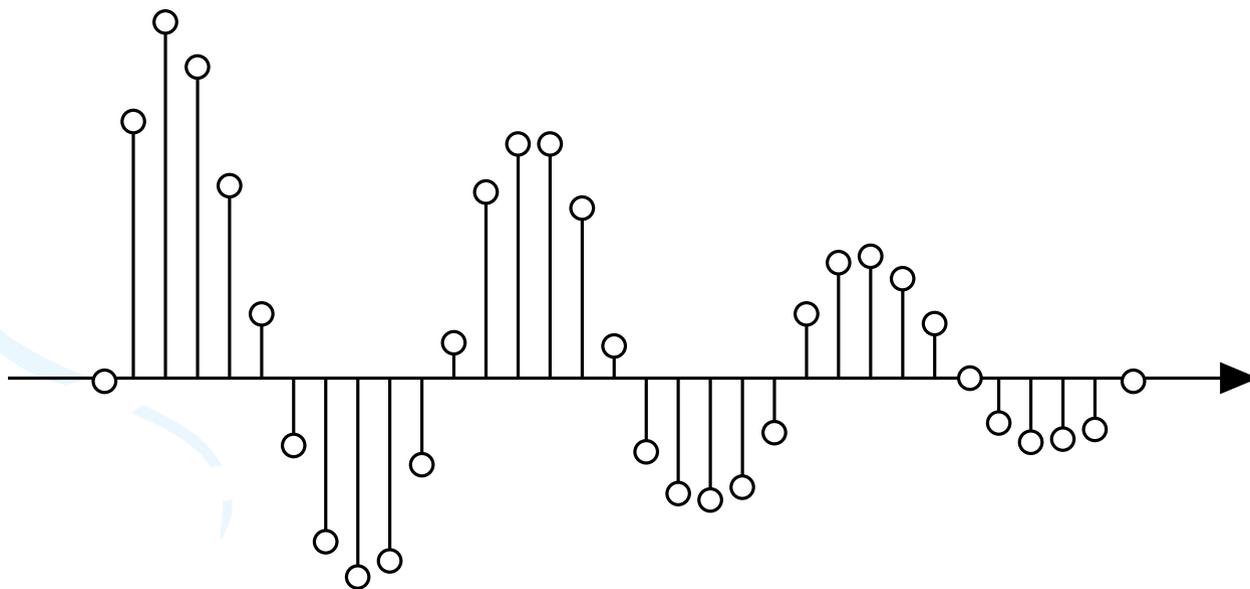
代償:
周波数の分
解能が低下



第七章 サンプリング定理

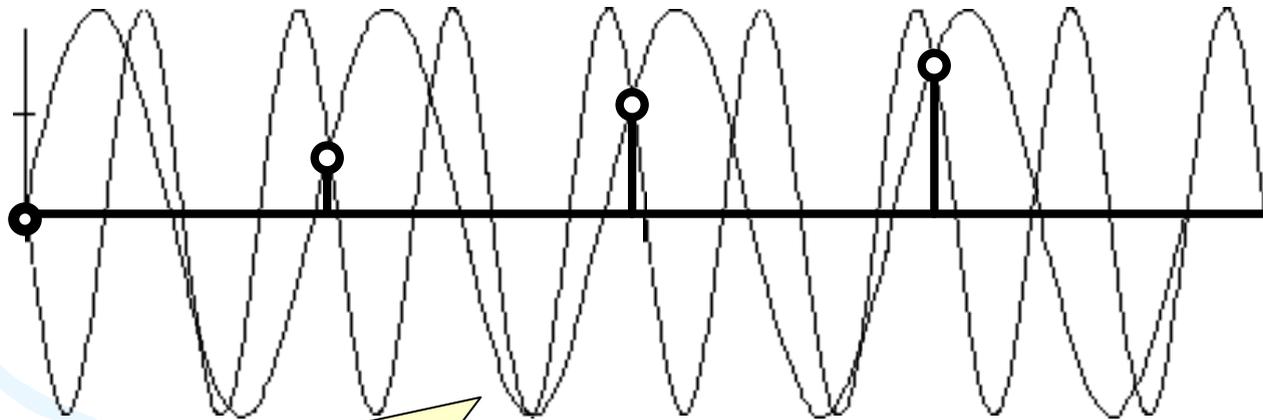
サンプリング

- 一定の時間間隔で音声波形の振幅を測定
波形を数値の列(標本系列)に変換



非可逆性に注意

- 標本系列から、もとの波形を復元できるとは限らない



異なる波形が同じ数値系列
に変換される。

サンプリング定理

- 標本系列から、もとの波形を復元できる条件は、

「信号に含まれる周波数成分が

$-f_{\max} \sim f_{\max}$ であるとき、

サンプリング周波数を

$2 \cdot f_{\max}$ 以上にすること」

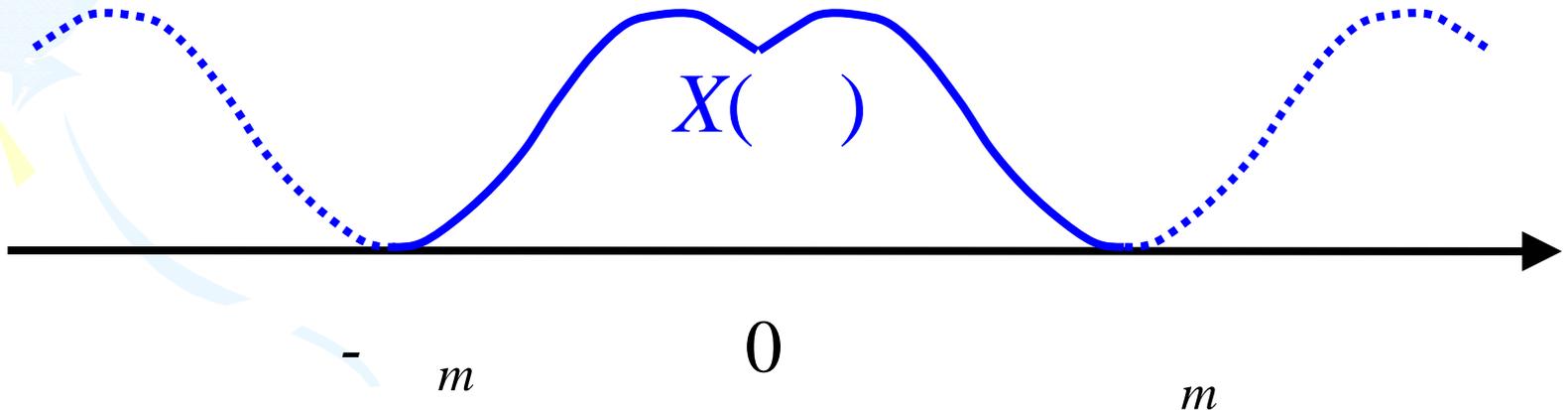
サンプリング定理 (2)

- 信号に含まれる周波数成分を $-\omega_m \sim \omega_m$ とするとき、標本系列 x_p から波形 $x(t)$ が復元できるか？

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \end{aligned}$$

サンプリング定理 (3)

- $X(\omega)$ は $-\omega_m \sim \omega_m$ の範囲に帯域制限されている



サンプリング定理 (4)

- $X(\omega)$ のフーリエ級数 (z-変換(準備)(5))

$$X(\omega) = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \exp\left(-j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right)$$

$$x_p = 2\pi \cdot x\left(\frac{\pi}{\omega_m} \cdot p\right)$$

サンプリング定理(5)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \exp\left(-j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right)$$

サンプリング定理(6)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \left\{ \frac{1}{2\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \exp\left(-j 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \omega\right) \exp(j \omega t) \right\} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{4\pi\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \exp\left(j\omega \left(t - 2\pi \frac{p}{2\omega_m} \right) \right) d\omega$$

【補足】微積分の公式

$$(f(g(x)))' = g(x)' f'(g(x))$$

$$(\exp(ax))' = a \cdot \exp(ax)$$

$$\left(\frac{\exp(ax)}{a}\right)' = \exp(ax)$$

$$\int \exp(ax) dx = C + \frac{\exp(ax)}{a}$$

サンプリング定理 (7)

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m} \exp\left(j\omega\left(t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}\right)\right) d\omega = \left[\frac{\exp\left(j\omega\left(t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}\right)\right)}{j\left(t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}\right)} \right]_{-\omega_m}^{\omega_m}$$
$$= \frac{\exp\left(j\omega_m\left(t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}\right)\right) - \exp\left(-j\omega_m\left(t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}\right)\right)}{j\left(t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}\right)}$$

サンプリング定理(8)

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{4\pi\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \exp\left(j\omega\left(t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}\right)\right) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi\omega_m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \cdot \frac{2\sin(\omega_m t - \pi p)}{t - 2\pi\frac{p}{2\omega_m}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \cdot \frac{\sin(\omega_m t - \pi p)}{\omega_m t - \pi p}\end{aligned}$$

標本系列から
波形が復元で
きた

サンプリング定理 (再掲)

- 標本系列から、もとの波形を復元できる条件は、

「信号に含まれる周波数成分が

$-f_{\max} \sim f_{\max}$ であるとき、

サンプリング周波数を

$2 \cdot f_{\max}$ 以上にすること」

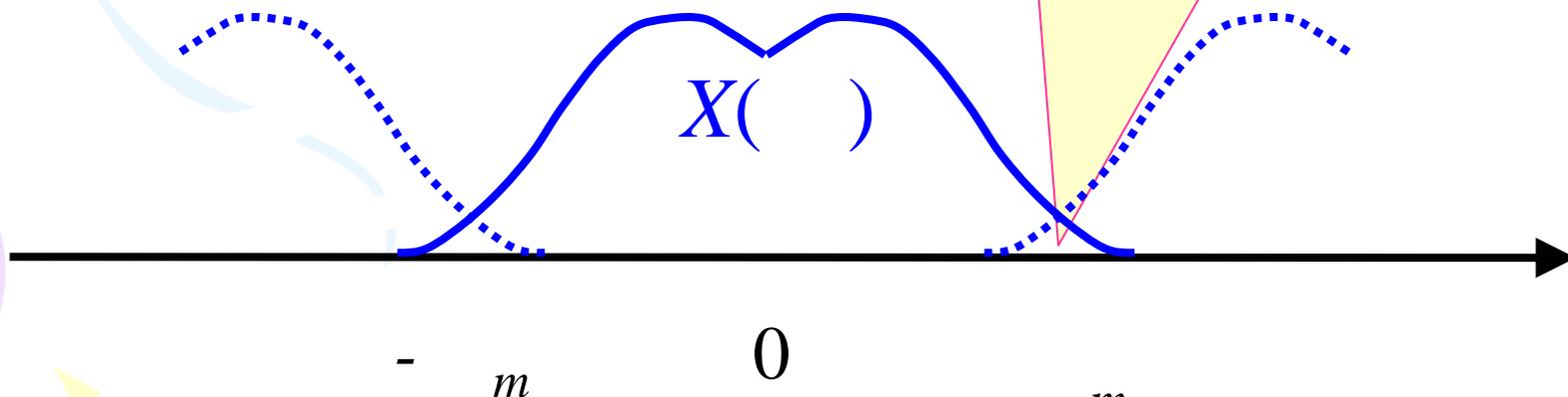
サンプリング条件が満たされないと

- 信号に含まれる周波数成分が

$-f_{\max} \sim f_{\max}$ であるとき、

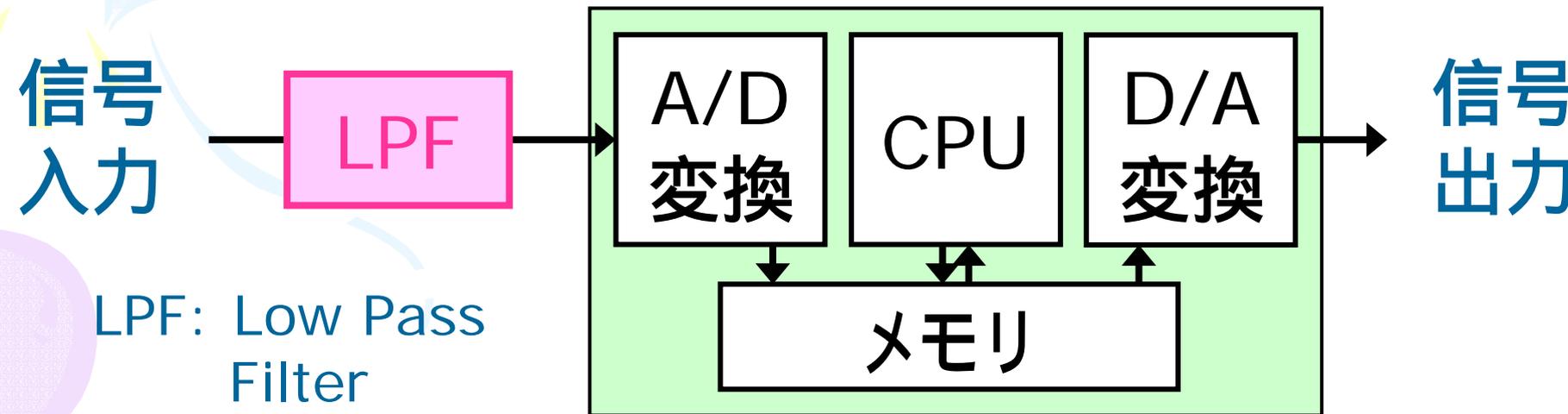
サンプリング周波数が $2 \cdot f_{\max}$ 以下だと...

周波数成分が重なってど
ちらだかわからなくなる



実用的には

- A/D変換前に入力信号を
「サンプリング周波数 / 2」
以下に帯域制限する



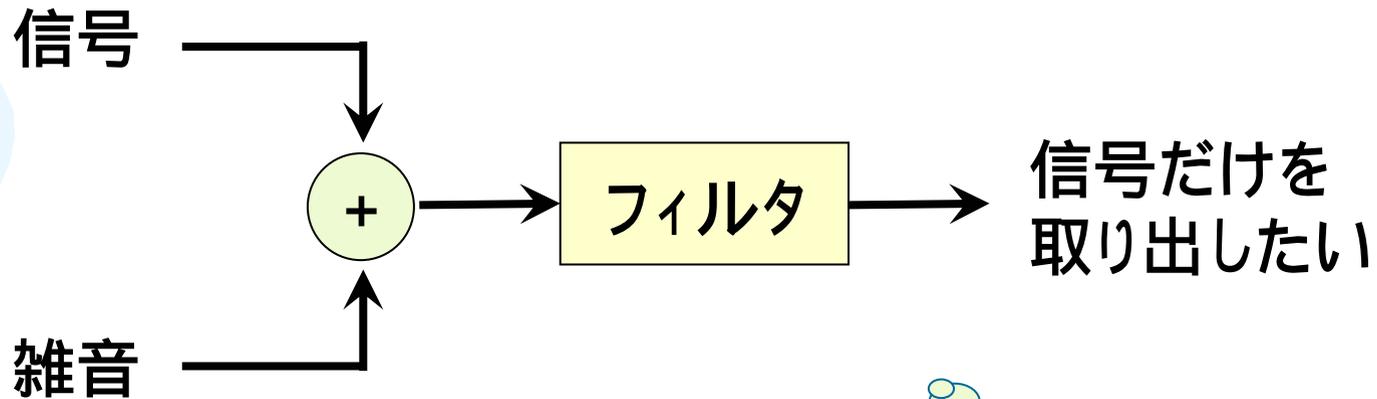
LPF: Low Pass Filter



第八章 デジタルフィルタ

ウィナーの信号理論(再掲)

• ウィナー (Wiener) フィルタ

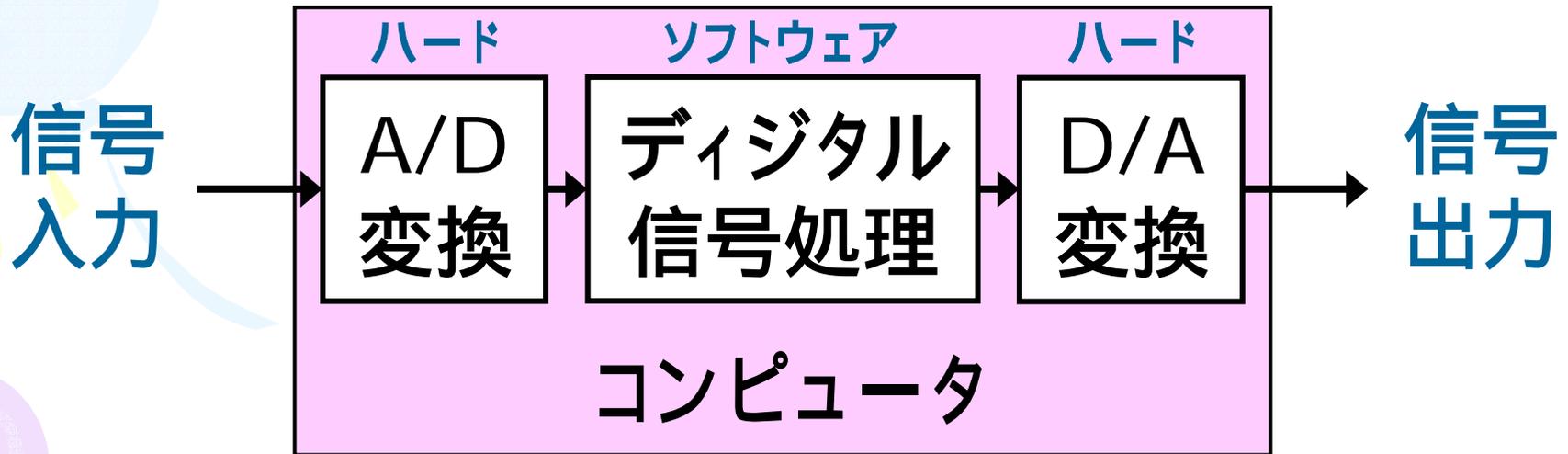


- 高品質の音声通信
- 脳波・地震波の解析

まだ
アナログの
世界

デジタルフィルタ

- デジタル信号処理を用いてフィルタの「伝達特性」を作る



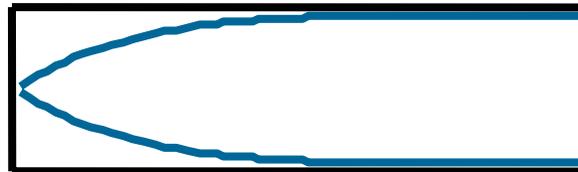
共鳴と周波数伝達特性

- 気柱の長さによって通しやすい周波数がある

(周波数)伝達特性

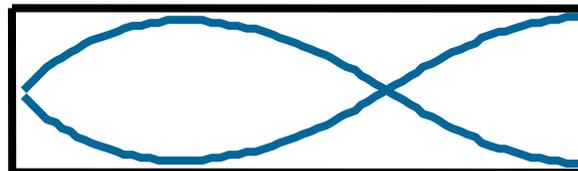
閉鎖端

気体の分子が動けない
体積速度の節になる



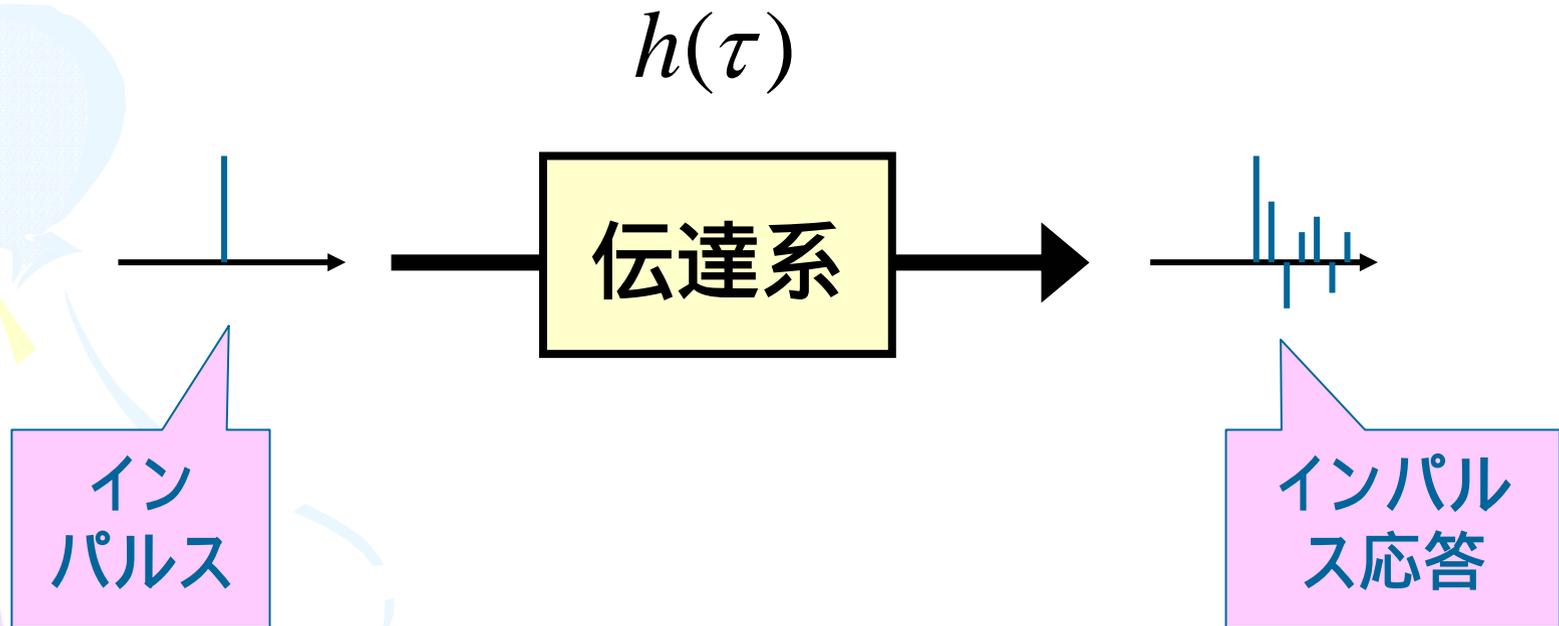
開放端

気体の分子が自由に動く
体積速度の腹になる



伝達特性の定式化

- ・ 時間領域：「インパルス応答」



伝達特性の定式化 (2)

- ・ 入力信号 x とインパルス応答 h から出力信号 y を計算できる

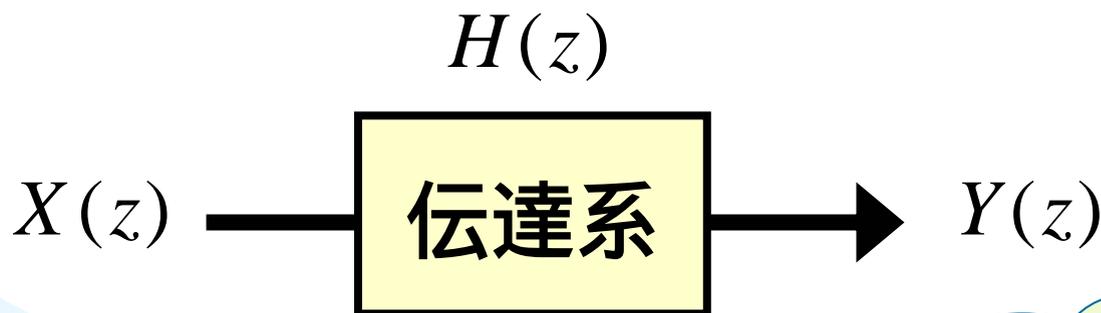


$$y(k) = \sum_{p=0}^{\infty} x(k-p) \cdot h(p)$$

たたみ込み
(convolution)
計算という

伝達特性の定式化 (3)

- ・ 周波数領域：「伝達関数」
入力 x 、インパルス応答 h 、出力 y の z -変換を $X(z)$, $H(z)$, $Y(z)$ とすると



$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$H(z)$ を伝達
関数と呼ぶ

伝達特性の定式化 (4)

・ 時間領域 :

「インパルス応答」 (impulse response)

$$y(k) = \sum_{p=0}^{\infty} x(k-p) \cdot h(p)$$

・ 周波数領域 :

「伝達関数」 (transfer function)

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

デジタルフィルタの演算

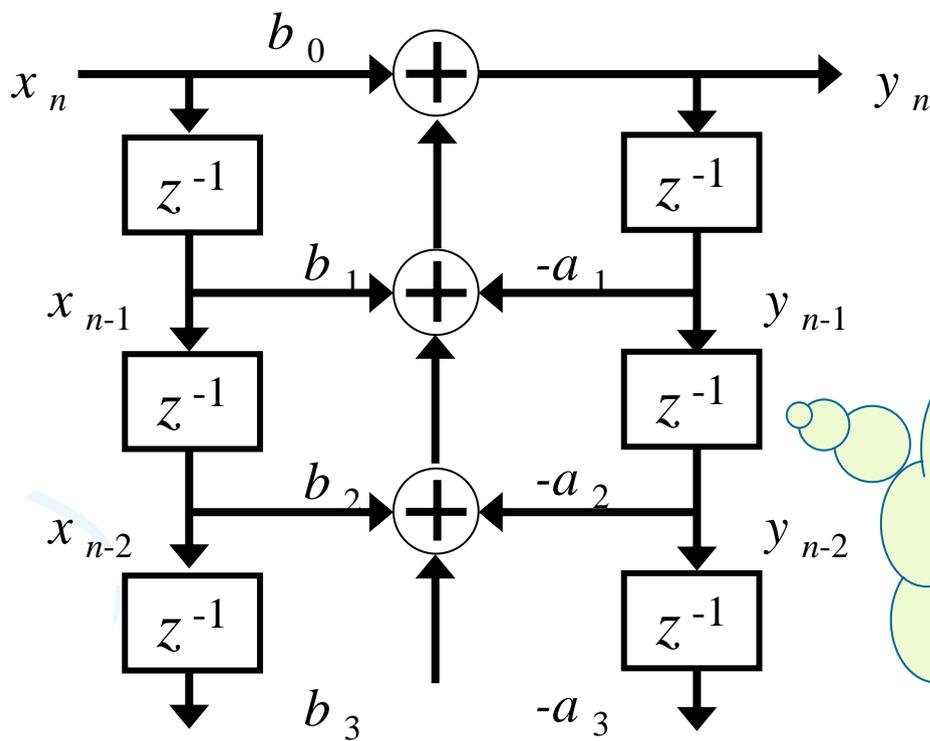
- デジタルフィルタの動作は「差分方程式」によって表される

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_I y(n-I) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_J x(n-J)$$

デジタルフィルタの演算 (2)

- 差分方程式を回路表示

入力
信号



出力
信号

z^{-1} は
時間遅
れ要素

デジタルフィルタの演算 (3)

- デジタルフィルタの 「伝達特性」

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$
$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_J z^{-J}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_I z^{-I}}$$

伝達特性とスペクトル

- 伝達特性の 「極」と「零点」

- 極 : 分母 $X(z)=0$ を満たす z

$$1 + a_1x + \cdots + a_Ix^I \\ = (1 - \alpha_1x)(1 - \alpha_2x) \cdots (1 - \alpha_Ix) = 0$$

- 零点 : 分子 $Y(z)=0$ を満たす z

$$b_0 + b_1x + \cdots + b_Jx^J \\ = b_0(1 - \beta_1x)(1 - \beta_2x) \cdots (1 - \beta_Jx) = 0$$

伝達特性とスペクトル (2)

- スペクトル =
 z -平面中の単位円上の伝達特性

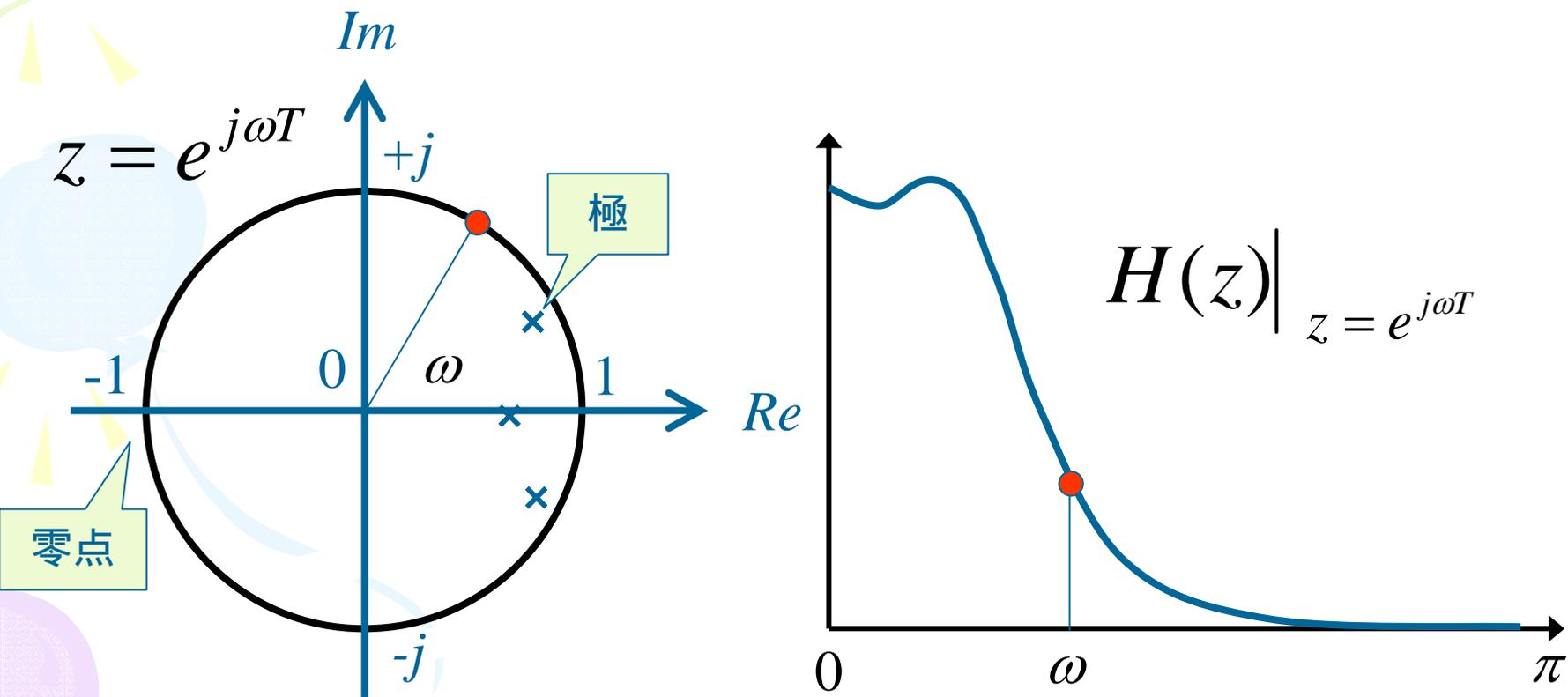
$$H(z) \Big|_{z = e^{j\omega T}}$$

T はサンプリング周期

伝達特性とスペクトル (3)

- z -平面中の単位円の近くに極がある
その付近の周波数で、スペクトルの値が大きくなる
- z -平面中の単位円の近くに零点がある
その付近の周波数で、スペクトルの値が小さくなる

伝達特性とスペクトル (4)



デジタルフィルタの安定性

- 伝達特性を連分数展開する

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_J z^{-J}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_I z^{-I}}$$

$$= R(z) + \sum_{k=1}^I \frac{\varphi_k}{(1 - \alpha_k \cdot z^{-1})}$$

$I - J$ 次の z^{-1}
の多項式

「極」

デジタルフィルタの安定性 (2)

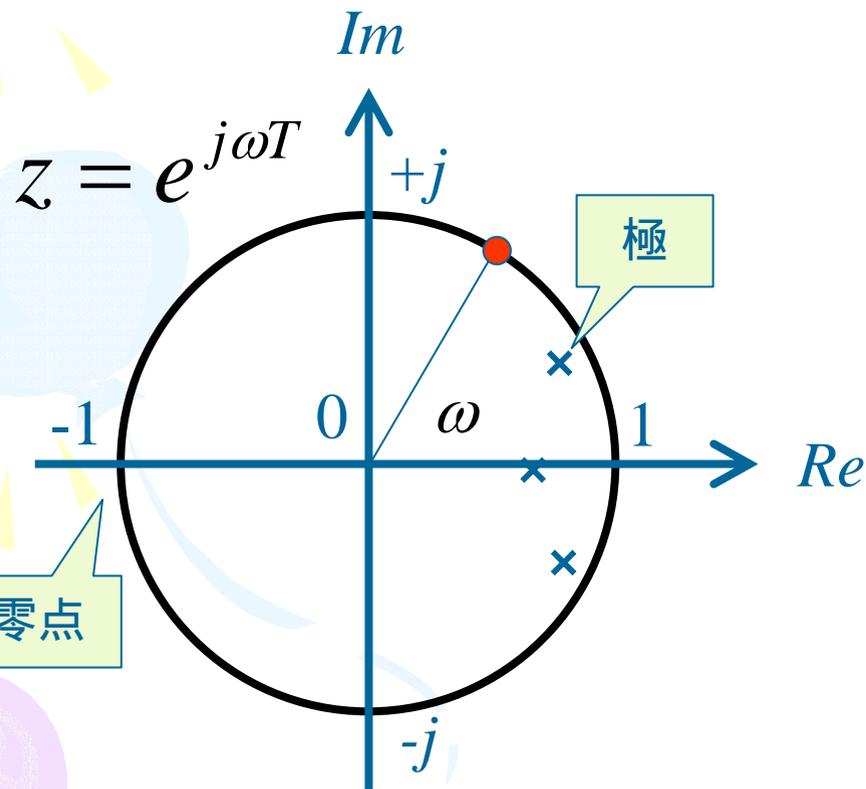
- 伝達特性を逆 z -変換する

$$Z^{-1}[H(z)] = Z^{-1}\left[R(z) + \sum_{k=1}^I \frac{\varphi_k}{(1 - \alpha_k \cdot z^{-1})} \right]$$

$$h_n = \rho_n + \sum_{k=1}^I \varphi_k \cdot \alpha_k^n$$

よって $|\alpha_k| \geq 1$ のとき n で h_n (不安定)

デジタルフィルタの安定性 (3)

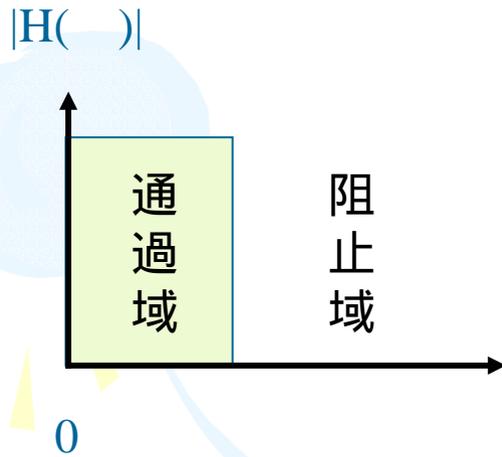


【安定条件】
z-平面における
伝達関数のすべ
ての極が単位円
の内側に存在

(注) z^{-1} 平面を考えると
きは外側になる

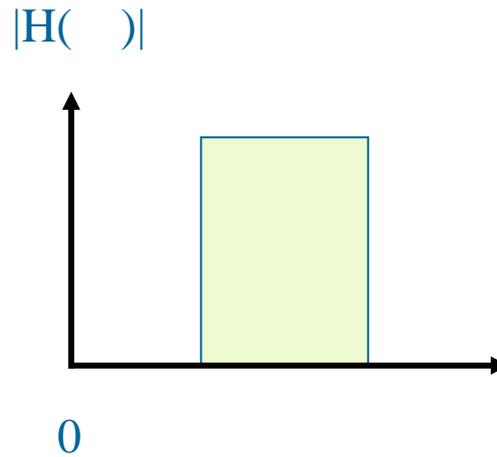
帯域通過フィルタ

LPF



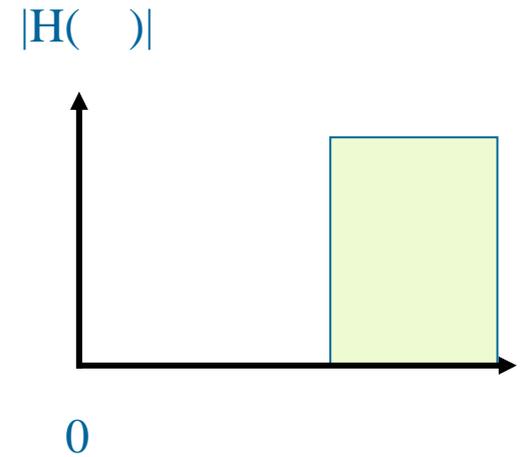
Low
Pass
Filter

BPF



Band
Pass
Filter

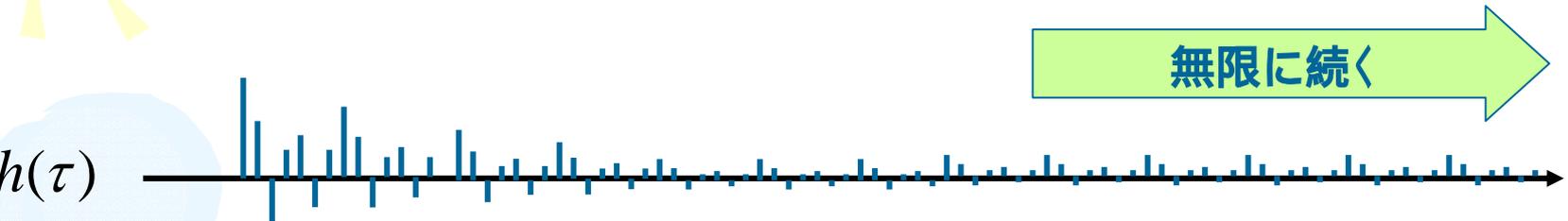
HPF



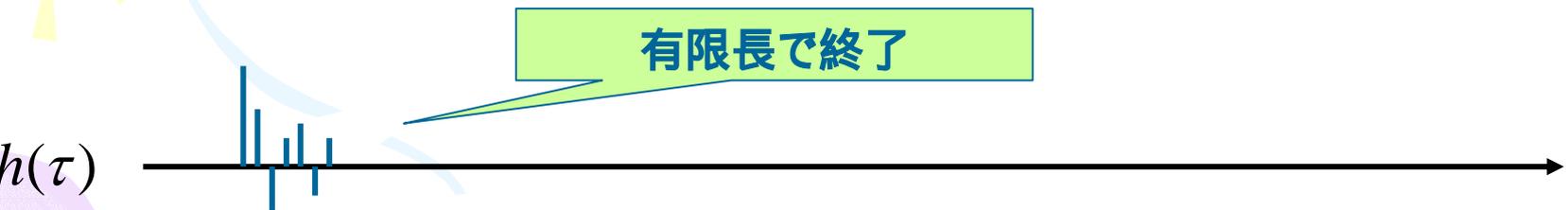
High
Pass
Filter

IIRフィルタとFIRフィルタ

- IIR (Infinite Impulse Response)



- FIR (Finite Impulse Response)



II Rフィルタの設計

- 例題: バタワース型LPF

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

伝達特性を
パワースペク
トルで規定

c はカット
オフ周波数

【補足】パーセバルの等式

- 「信号の時間領域のパワー（エネルギー）は周波数領域でも保存される」

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

II Rフィルタの設計 (2)

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

$$= \frac{1}{\prod_k \left(1 - j \exp(-j \frac{\pi + 2\pi \cdot k}{2N}) \cdot (\omega/\omega_c) \right)} \quad (N : \text{even})$$

$$= \frac{1}{\prod_k \left(1 - j \exp(-j \frac{\pi \cdot k}{N}) \cdot (\omega/\omega_c) \right)} \quad (N : \text{odd})$$

II Rフィルタの設計 (3)

$N : odd$

$$G(\omega) = \frac{1}{\prod_k \left(1 - j \exp(-j \frac{\pi \cdot k}{N}) \cdot (\omega / \omega_c) \right)}$$

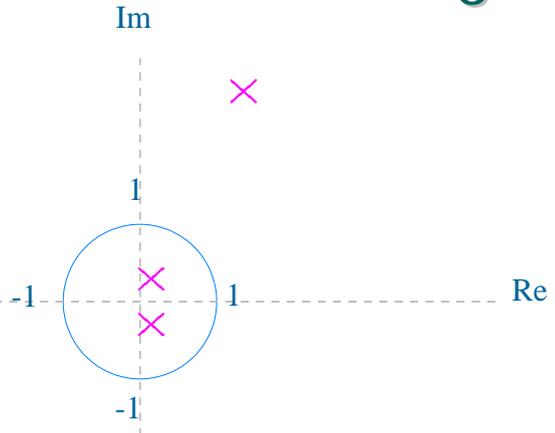
$$G(z) = \sum_k \frac{\varphi_k}{1 - \exp\left(2\pi \frac{\omega_c}{\omega_s} \exp(j \frac{\pi \cdot k}{N}) \right) \cdot z^{-1}}$$

$N : even$

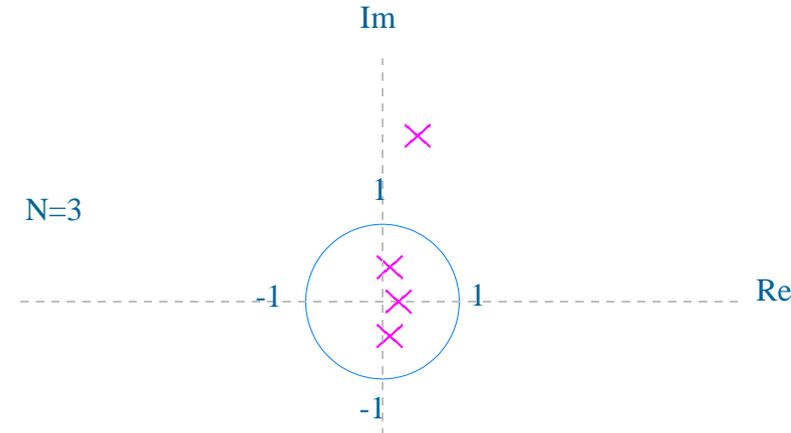
連分数展開して各項を z 変換

バターワース型LPFの極の位置 ($c/s = 0.5$)

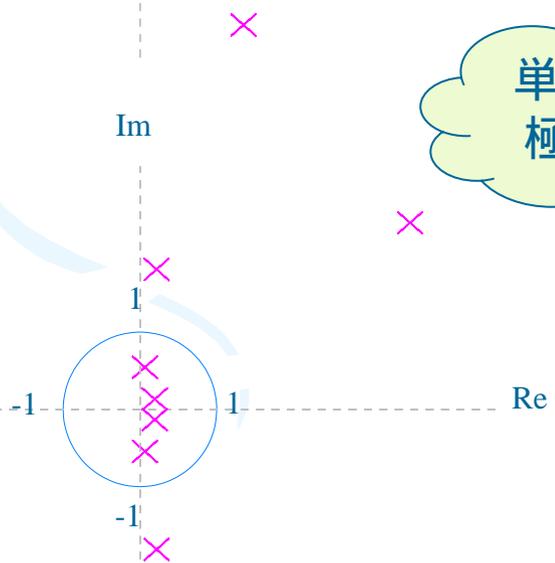
N=2



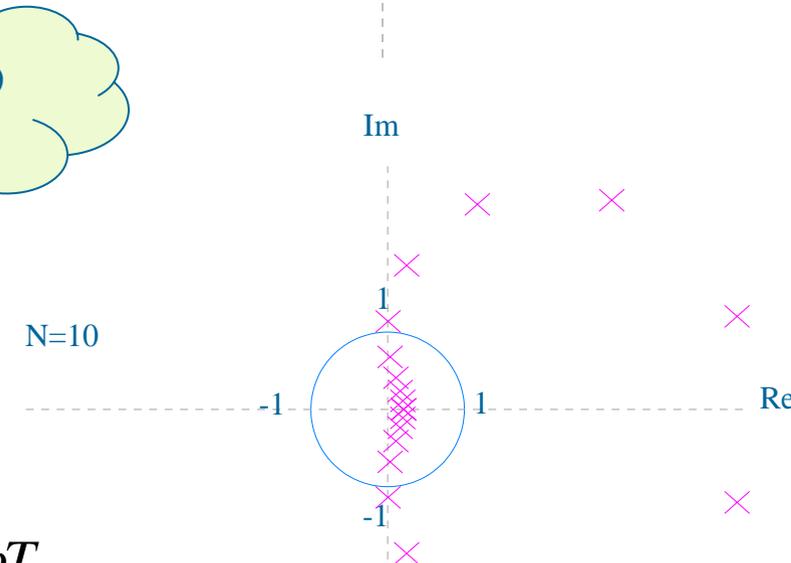
N=3



N=4



N=10



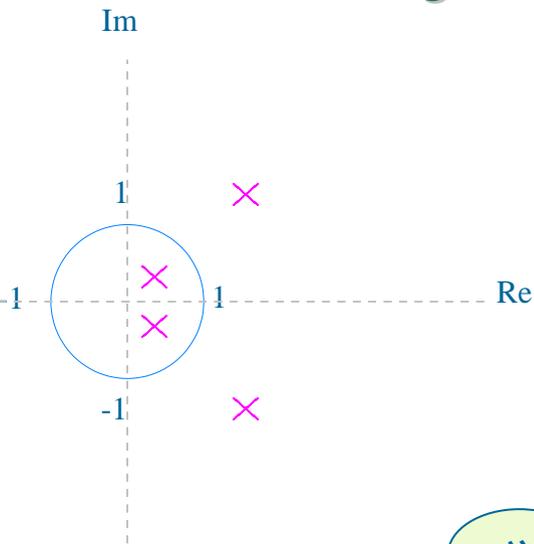
単位円内の
極だけ使う

デジタルフィルタ

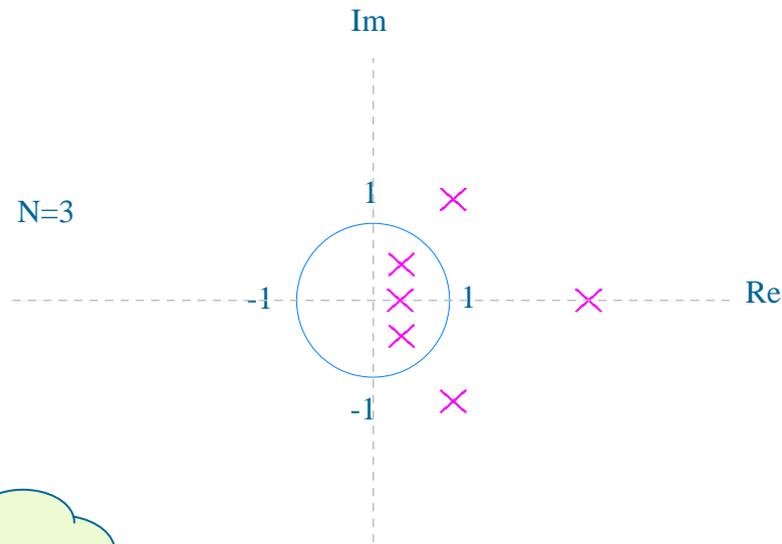
$$z = e^{j\omega T}$$

バターワース型LPFの極の位置 ($c/s = 0.33$)

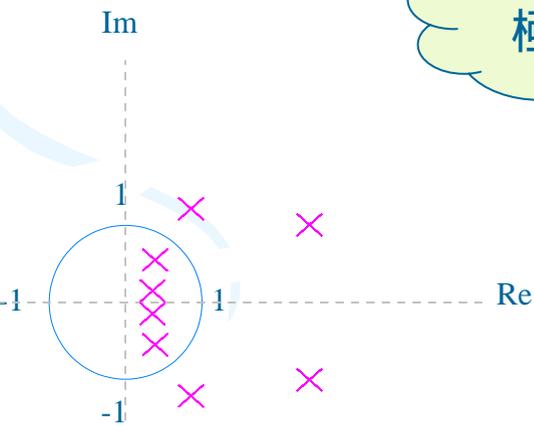
N=2



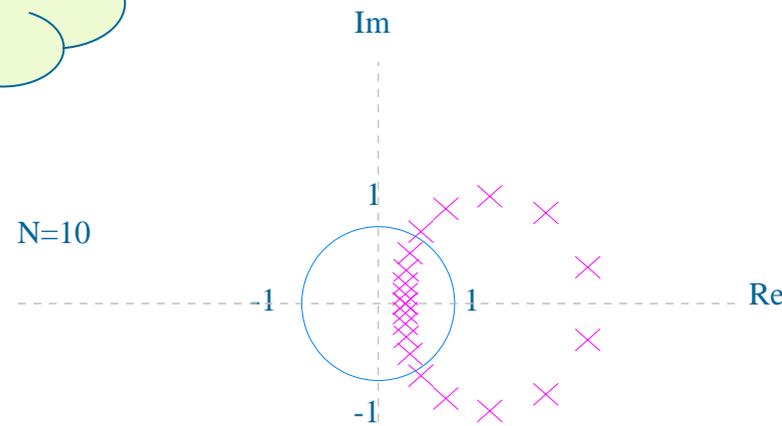
N=3



N=4



N=10



単位円内の
極だけ使う

デジタルフィルタ

$$z = e^{j\omega T}$$

FIRフィルタの設計

- FIRフィルタの「差分方程式」

$$y(n) =$$

$$b_0x(n) + b_1x(n-1) + \cdots + b_Jx(n-J)$$

(+) パラメータが直接インパルス応答に

(-) IIRフィルタと比較してパラメータ数多い

FIRフィルタの設計 (2)

- FIRフィルタの「伝達特性」

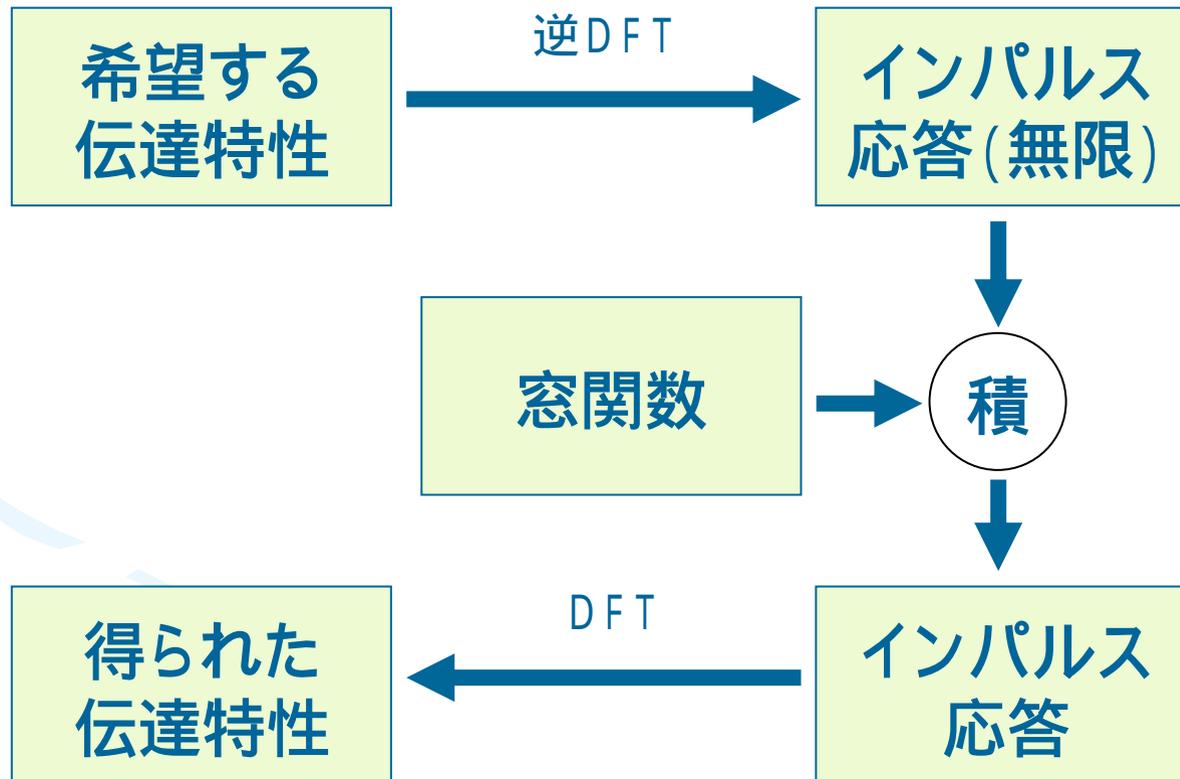
$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_J z^{-J}$$

(+) フィルタの安定性が保証されている

(伝達関数の分母 = 1 極がない)

FIRフィルタの設計 (3)

- 窓関数法によるフィルタ設計



自習課題

- デジタルフィルタのプログラムを「C」で作ってみよう

入力関数 `int speech_in();`

出力関数 `void speech_out(int y);`

FIRフィルタ係数 `double b[NCOEF];`

配列シフト関数

`void array_shift(int n, int data[]);`

(情報科学科以外の学生は要相談)