3 論理代数と論理関数 (2)

- ♣ 排他的論理和 $\boxed{\oplus}$ 演算
- ♣ 含意 $\boxed{\longrightarrow}$ 演算
- ♣ $\boxed{\text{積和}}$ 形と $\boxed{\text{積和標準}}$ 形
- ♣ 論理式の高度な簡単化

3.1 排他的論理和演算

3.1.1 排他的論理和演算とその性質

排他的論理和 ($\boxed{\text{exclusive}}$ -or)

x	y	$x \oplus y$
0	0	$\boxed{0}$
0	1	$\boxed{1}$
1	0	$\boxed{1}$
1	1	$\boxed{0}$

x と y の $\boxed{\text{一方のみが 1}}$ のとき 1

x と y が $\boxed{\text{異なる}}$ とき 1

基本的な性質

(1) 交換律

$$x \oplus y = \boxed{y \oplus x}$$

(2) 結合律

$$(x \oplus y) \oplus z = \boxed{x \oplus (y \oplus z)}$$

(3) and 演算との分配律

$$x(y \oplus z) = \boxed{xy \oplus xz}$$

(4) 零元, 単位との演算

$$x \oplus 0 = 0 \oplus x = \boxed{x}$$
$$x \oplus 1 = 1 \oplus x = \boxed{\overline{x}}$$

真理値表で確認

x	0	$x \oplus 0$
0	0	0
1	0	1

x	1	$x \oplus 1$
0	1	$\boxed{1}$
1	1	$\boxed{0}$

(5) 自分自身との演算

$$x \oplus x = \boxed{0}$$

$$x \oplus \overline{x} = \boxed{1}$$

真理値表で確認

x	x	$x \oplus x$
0	0	$\boxed{0}$
1	1	$\boxed{0}$

x	$\overline{x}$	$x \oplus \overline{x}$
0	1	$\boxed{1}$
1	0	$\boxed{1}$

(6) not 演算は位置を交換可能

$$\overline{x \oplus y} = \boxed{\overline{x} \oplus y} = \boxed{x \oplus \overline{y}}$$

$$\overline{x \oplus y \oplus z} = \overline{x} \oplus y \oplus z = x \oplus \overline{y} \oplus z = x \oplus y \oplus \overline{z} = \overline{x \oplus y} \oplus z = x \oplus \overline{y \oplus z}$$

これは例えば次のようにして示せる

$$\overline{x \oplus y} = x \oplus y \oplus \boxed{1} = \begin{cases} (x \oplus \boxed{1}) \oplus y = \overline{x} \oplus y \\ x \oplus (y \oplus \boxed{1}) = x \oplus \overline{y} \end{cases}$$

例題 3.1 論理関数 $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$ の真理値表を示せ.

まず $x \oplus y$ を, 次に $(x \oplus y) \oplus z$ の真理値を求めればよい

x	y	z	$x \oplus y$	$(x \oplus y) \oplus z$	x, y, z 中の 1 の個数
0	0	0	0	$\boxed{0}$	0
0	0	1	0	$\boxed{1}$	1
0	1	0	1	$\boxed{1}$	1
0	1	1	1	$\boxed{0}$	2
1	0	0	1	$\boxed{1}$	1
1	0	1	1	$\boxed{0}$	2
1	1	0	0	$\boxed{0}$	2
1	1	1	0	$\boxed{1}$	3

☆ $x_1 \oplus x_2 \cdots \oplus x_n$ の直観的意味

$x_1, \cdots, x_n$ の中の $\boxed{\text{1 の数が奇数}}$ のとき 1

3.1.2 排他的論理和を含む式の簡単化

例題 3.2 与えられた論理式を簡単化せよ.

1. 相補律 $x \oplus \overline{x} = 1$ は or の場合と同じ.
   - $ab \oplus a\overline{b}$
     $= a(b \oplus \overline{b})$
     $= \boxed{a}$
2. 吸収律は成立しない. $x \oplus 1 = \boxed{\overline{x}}$ となる.
   - $a \oplus ab$
     $= a(1 \oplus b)$
     $= \boxed{a\overline{b}}$
3. 括弧の展開は通常の論理和と同様
   - $(xy \oplus y\overline{z})(\overline{y} \oplus z) \oplus yz$
     $= (xy\overline{y} \oplus xyz \oplus y\overline{z}\,\overline{y} \oplus y\overline{z}z) \oplus yz$
     $= (0 \oplus xyz \oplus 0 \oplus 0) \oplus yz$
     $= xyz \oplus yz$
     $= (x \oplus 1)yz$
     $= \boxed{\overline{x}yz}$
4. $x \oplus x = 0$ となることに注意.
   - $a(b \oplus c) \oplus ac$
     $= ab \oplus ac \oplus ac$
     $= \boxed{ab}$
5. 否定の交換 $(\overline{x \oplus y} = x \oplus \overline{y})$
   - $(a \oplus \overline{b} \oplus c)(\overline{a \oplus b \oplus c})$
     $= (a \oplus \overline{b} \oplus c)(\boxed{a \oplus \overline{b} \oplus c})$
     $= (a \oplus \overline{b} \oplus c)$

練習 3.1 次の式を簡単化せよ.

1. $ab \oplus a\overline{b}c \oplus a\overline{b}\overline{c}$
2. $(a \oplus bc)(a \oplus \overline{b})$
3. $ab \oplus abc \oplus a\overline{b}\overline{c}$
4. $\overline{a \oplus \overline{b} \oplus c}$

3.1.3　排他的論理和の and, or, not による書き換え

【性質 3.1】 排他的論理和演算は and, or, not で表せる

$x \oplus y = \boxed{\overline{x}y + x\overline{y}}$　【重要】

x	y	$x \oplus y$	
0	0	0	
0	1	1	$\cdots \boxed{\overline{x}y}$
1	0	1	$\cdots \boxed{x\overline{y}}$
1	1	0	

例題 3.3 排他的論理和演算を and, or, not 演算で表すことにより, 次の等式を証明せよ.

1. $x \oplus x = 0$

$$\text{LHS} = x\overline{x} + \overline{x}x = 0 + 0 = 0$$

2. $\overline{x} \oplus y = \overline{x \oplus y}$

$a \oplus b = \overline{a}b + a\overline{b}$ だから,

$$\text{LHS} = \overline{\overline{x}}y + \overline{x}\,\overline{y} = xy + \overline{x}\,\overline{y}$$

$$\begin{aligned}\text{RHS} &= \overline{\overline{x}y + x\overline{y}} \\ &= \boxed{\overline{\overline{x}y} \cdot \overline{x\overline{y}}} \quad <\text{ドモルガン}> \\ &= \boxed{(x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y)} \quad <\text{ドモルガン}> \\ &= x\overline{x} + xy + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}y \\ &= xy + \overline{x}\,\overline{y} = \text{LHS}\end{aligned}$$

※ LHS: $\boxed{\text{left-hand side}}$ ($\boxed{\text{左辺}}$), RHS: $\boxed{\text{right-hand side}}$ ($\boxed{\text{右辺}}$)

3.1.4　排他的論理和の応用

排他的論理和演算は，通信や暗号の分野でよく用いる

1. 誤り検出

- 単にデータだけを送る場合

  データ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1)$ を送信

  → 雑音などで 1 ビットの反転が発生

  → 誤ったデータ $(1, \underline{0}, 0, 1)$ を受信　< 困る >

- データに「パリティ検査ビット」p を付加する

  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \underline{p}) = (1, 1, 0, 1, \boxed{1})$ を送信

  $*$ ただし p は, $(x_1, x_2, x_3, x_4, \underline{p})$ 中の 1 の数が $\boxed{\text{偶数}}$ になるように決める

  式で書くと $p = \boxed{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4}$ である

  → 雑音などで 1 ビットの反転が発生

  → 誤ったデータ $(1, \underline{0}, 0, 1, 1)$ を受信

  → データを検査する

  $*$ (x_1, x_2, x_3, x_4, p) 中の 1 の数が $\boxed{\text{偶数}}$ であるかどうか調べる

式で書くと $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus p = \boxed{0}$ かどうか

→1 の個数が奇数個であれば, データは誤っているので, $\boxed{\text{再送}}$ を要求する

☆ この例は最も簡単な誤り検出方式. 複数ビットの誤りを検出する方法や, 誤りを検出するだけでなく自動的に訂正する方法が種々存在する.

2. 暗号化

- 単純な暗号 (しかし, 鍵が長ければ最強)

< 暗号化 >

メッセージ		1 0 1 0 1 1 1 1
鍵	$\oplus$	1 1 0 1 0 1 0 1
暗号文		$\boxed{0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0}$

< 復号 >

暗号文		0 1 1 1 1 0 1 0
鍵	$\oplus$	1 1 0 1 0 1 0 1
メッセージ		$\boxed{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1}$

3.2 含意演算

含意 ($\boxed{\text{imply}}$) 演算

x	y	$x \to y$
0	0	$\boxed{1}$
0	1	$\boxed{1}$
1	0	$\boxed{0}$
1	1	$\boxed{1}$

x $\boxed{\text{ならば}}$ y

☆ 含意演算は, 論理学の分野でよく用いるが, 論理設計の分野ではあまり用いないので, 詳細は省略する.

【性質 3.2】含意演算は or と not で表せる

$x \to y = \boxed{\overline{x} + y}$ 　【重要】

$\boxed{\textbf{例題 3.4}}$ 含意演算を or 演算および not 演算で表すことにより, 次の等式を証明せよ.

1. $(x \to y)(x \to z) = (x \to yz)$

$\mathrm{LHS} = (\overline{x} + y)(\overline{x} + z) = \overline{x} + yz$

$\mathrm{RHS} = \overline{x} + yz = \mathrm{LHS}$

3.3 積和形と積和標準形

3.3.1 用語 … リテラル, 積項, 積和形, 和積形

- リテラル ($\boxed{\text{literal}}$)

  論理変数またはその $\boxed{\text{論理否定}}$ をリテラルと呼ぶ

  (例) a, b, c が論理変数のとき, $\boxed{a, b, c, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}}$ はリテラルである

  リテラル数

  論理式中のリテラルの数

  論理式の複雑さ/簡単さの一つの尺度として用いることがある

  (例) $a + \overline{b}c$ のリテラル数は $\boxed{3}$

  (例) $(\overline{a}b + c)(\overline{a}bc + \overline{c} + abc)$ のリテラル数は $\boxed{10}$

- 積項 ($\boxed{\text{product term}}$)

  リテラルの $\boxed{\text{論理積}}$ (ただし, 同じ変数のリテラルが 2 個以上含まれないもの) を積項と呼ぶ

  (例) ab や $a\overline{b}c$ や b や $\overline{c}$ は積項である

  (例) aab や $ab\overline{b}c$ は積項ではない (同じ変数のリテラルが 2 個以上含まれる)

  積項数

  論理式中の積項の数

  論理式の複雑さ/簡単さの一つの尺度として用いることがある

  (例) $a + \overline{b}c$ の積項数は $\boxed{2}$

  (例) $\overline{a}bc + \overline{c} + abc$ の積項数は $\boxed{3}$

- 積和形 ($\boxed{\text{sum-of-products}}$ form)

  積項の論理和からなる論理式を積和形 (論理式) と呼ぶ

  (例) $a + b\overline{c}d + \overline{a}c$ は積和形である

【参考】

$a(b + \overline{c} + d)(\overline{a} + c)$ のような論理式を「和積形」(product-of-sums form) と呼ぶ

練習 3.2 下記の論理式について次の問いに答えよ.

1. (a) のリテラル数はいくつか
2. (a) の積項数はいくらか
3. 積和形であるものはどれか

(a) $a + \overline{b}c + \overline{a}b\overline{c}$

(b) $(a + \overline{b} + c)(\overline{a} + b)(a + \overline{c} + d)$

(c) $(a + \overline{b}c)(\overline{a} + d)(ac + \overline{b}d)$

(d) $a + c$

3.3.2 積和標準形

☆ 積和形の一種. オンセット表現とほぼ等価.

- 考え方

  (a,b,c) が $(1,0,1)$ のときにだけ 1 になる論理関数 $f(a,b,c)$ は,

  $f(a,b,c) = \boxed{a\bar{b}c}$ と表せる.

  (a,b,c) が $(0,1,0)$ または $(1,1,0)$ のときにだけ 1 になる論理関数 $g(a,b,c)$ は

  $g(a,b,c) = \boxed{\bar{a}b\bar{c}} + \boxed{ab\bar{c}}$ と表せる

  これを一般化すれば, オンセットさえ分かっていれば, どんな論理関数でも積和形で表現することが可能

  $\mathrm{onset}(f_{maj}(a,b,c)) = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ より

  $f_{maj} = \boxed{\bar{a}bc} + \boxed{a\bar{b}c} + \boxed{ab\bar{c}} + \boxed{abc}$ と表せる.

  このようにオンセットに対応した積和形を積和標準形と呼ぶ.

  また, 一つ入力の組合せ ($(a,b,c) = (0,1,0)$ 等) に対応する積項を $\boxed{\text{最小項}}$ と呼ぶ.

- 最小項 ($\boxed{\text{minterm}}$)

  全ての変数のリテラルを含む積項を最小項という

  (例) 変数集合が $\{a,b,c\}$ のとき,

  $a\bar{b}c$ や $\bar{a}\bar{b}c$ は最小項である

  $a\bar{b}$ や a 等は最小項ではない

  この変数集合に対する最小項は全部で $\boxed{8}$ 種類 $(abc, ab\bar{c}, a\bar{b}c, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}bc, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{b}c, \bar{a}\bar{b}\bar{c})$

  最小項は, 変数に対するある一つの入力組合せに対してのみ 1 となる

  $a\bar{b}c$ は $(a,b,c) = (\boxed{1,0,1})$ の時のみ 1, それ以外の時は 0

- 積和標準形 ($\boxed{\text{canonical}}$ sum-of-products form)

  論理関数 f を $\boxed{\text{最小項}}$ の $\boxed{\text{論理和}}$ で表わしたものを f の積和標準形という

  $\boxed{\text{最小項}}$ 展開, $\boxed{\text{主加法}}$ 標準形 (disjunctive canonical form) とも呼ばれる

例題 3.5 次の論理関数の積和標準形を求めよ

1. $f(a,b,c)$

a	b	c	$f(a,b,c)$	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\Rightarrow \boxed{\bar{a}\bar{b}c}$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\Rightarrow \boxed{a\bar{b}c}$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$\Rightarrow \boxed{abc}$

   これより $f(a,b,c) = \boxed{\bar{a}\bar{b}c} + \boxed{a\bar{b}c} + \boxed{abc}$ と書ける

2. $g(a,b,c,d) = \sum(3,7,12,13)$

   $\mathrm{onset}(g(a,b,c,d)) = \{(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1)\}$ より

   $g(a,b,c,d) = \boxed{\bar{a}\bar{b}cd} + \boxed{\bar{a}bcd} + \boxed{ab\bar{c}\bar{d}} + \boxed{ab\bar{c}d}$

【**性質 3.3**】ある論理関数を表す論理式は $\boxed{\text{無限に}}$ 存在するが, 積和標準形は $\boxed{\text{一意}}$.
「標準形」と呼ばれるのはこのため

例) 多数決関数 $f_{maj}(a,b,c)$ を表現する式は複数存在する

$$\begin{aligned} f_{maj}(a,b,c) &= ab + bc + ca \\ &= ab + bc + a\bar{b}c \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \\ &= \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc \end{aligned}$$

【**性質 3.4**】任意の論理関数は $\boxed{\text{論理式}}$ で表現可能.
積和標準形を用いればよい

練習 3.3 次の論理関数の積和標準形を示せ.

1. $f(a,b,c)$

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

2. $g(a,b,c,d) = \sum(1,4,9)$

3.4 論理式の高度な簡単化

☆ 少し難しい. 現時点では必ずしもできなくてよい. あまり深追いしないこと.

例題 3.6 与えられた論理式を簡単化せよ.

1. ドモルガンと相補律
   - $a + b + \bar{a}\bar{b}$
     $= a + b + \boxed{\overline{a+b}}$ < ドモルガン >
     $= 1$ < 相補律 >
2. $x + \bar{x}y = x + y$, およびその応用
   - $x + \bar{x}y$
     $= \boxed{x + xy} + \bar{x}y$ < 吸収律 $x + xy = x$ を逆に適用して冗長な項を生成 >
     $= x + (x + \bar{x})y$
     $= x + y$

- $a+b+\overline{a}\overline{b}c$
  $=(a+b)+(\overline{a+b})\cdot c$　　$<$ ドモルガン $>$
  $=a+b+c$　　$<X+\overline{X}c=X+c$ を適用 $>$

3. 項のコピー
   - $\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}y+xy$
     $=\overline{x}\,\overline{y}+\boxed{\overline{x}y+\overline{x}y}+xy$　　$<\overline{x}y$ を複製 $>$
     $=\overline{x}(\overline{y}+y)+(\overline{x}+x)y$
     $=\overline{x}+y$
4. $xy+yz+\overline{x}z=xy+\overline{x}z$　　(冗長な項の削除の一種だが, この変形は特に consensus と呼ばれる)
   - $xy+yz+\overline{x}z$
     $=xy+\boxed{xyz+\overline{x}yz}+\overline{x}z$　　$<yz$ を分割 $>$
     $=xy(1+z)+(1+y)\overline{x}z$
     $=xy+\overline{x}z$

練習問題の解答例

練習 3.1

1. $ab\oplus a\overline{b}c\oplus a\overline{b}\overline{c}=ab\oplus a\overline{b}(c\oplus\overline{c})=ab\oplus a\overline{b}=a(b\oplus\overline{b})=a$
2. $(a\oplus bc)(a\oplus\overline{b})=aa\oplus a\overline{b}\oplus abc\oplus b\overline{b}c=a\oplus a\overline{b}\oplus abc=a(1\oplus\overline{b})\oplus abc=ab\oplus abc=ab(1\oplus c)=ab\overline{c}$
3. $ab\oplus abc\oplus a\overline{b}\overline{c}=ab(1\oplus c)\oplus a\overline{b}\overline{c}=ab\overline{c}\oplus a\overline{b}\overline{c}=a(b\oplus\overline{b})\overline{c}=a\overline{c}$
4. $\overline{\overline{a\oplus b}\oplus c}=\overline{\overline{a}\oplus b\oplus c}=\overline{\overline{a}}\oplus b\oplus c=a\oplus b\oplus c$

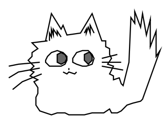
練習 3.2

1. リテラル数は 6
2. 積項数は 3
3. 積和形は (a)(d)

   (注) $a+c$ は, a と b をそれぞれ積項と見なせば積和形になる

練習 3.3

1. $f(a,b,c)=\overline{a}\,\overline{b}c+\overline{a}bc+ab\overline{c}$
2. $g(a,b,c,d)=\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}d+\overline{a}b\overline{c}\,\overline{d}+a\overline{b}\,\overline{c}d$



Nagisa ISHIURA