

# 曲線の定性的扱いと自己交差性の判定

高橋 和子<sup>1,a)</sup>

概要：本発表では、単位セグメントの列として定性的に記述された曲線の 2 次元平面への埋め込みについて述べる。単位セグメントは方向と凸性を属性としてもつ曲線分であり、複数の単位セグメントを連結していくことで尖点のない円滑な有限曲線が得られる。著者らは単位セグメントの定性表現を提案し、その表現上でこのような曲線を導出する方法を示した。一方、定性的な扱いのため、与えられた記号表現の列に対応する曲線を 2 次元平面上に描画すると無限通りの可能性がある。その中には自己交差するものやらせん状になっているものがあり、これらは自然界のオブジェクトの境界線としては望ましくない。本発表では、曲線を構成するセグメントの向きを考慮することで、らせん状にならないようにその曲線が描画できるかどうかを判定する手法を定式化する。

キーワード：定性空間推論, 曲線, 平面埋め込み

## Qualitative Treatment of Curves and Judgment for Their Self-Intersectionality

KAZUKO TAKAHASHI<sup>1,a)</sup>

**Abstract:** We describe an embedding of the qualitative representation, given as a sequence of primitive segments, onto a two-dimensional plane. The primitive segment is a directed curved segment with convexity. We get a smooth finite curve without a cusp by connecting multiple primitive segments. We previously proposed a qualitative representation for a primitive segment and showed the reasoning method that derives a symbolic sequence corresponding to such a curve. Conversely, there exist an infinite numbers of drawings on a two-dimensional plane which correspond to a given symbolic sequence because of the qualitative treatment of curves. If the curve on the plane has a self-intersection points or forms a spiral, then it is not desirable, considering that the curve represents a borderline of an actual object. In this presentation, we formalize a method to judge whether it is possible to draw a curve that is not in a spiral form on a two-dimensional plane, by checking orientations of the segments that configure the curve.

**Keywords:** qualitative spatial reasoning, curved line, embedding on a plane

### 1. はじめに

定性空間推論 (Qualitative Spatial Reasoning, QSR) は空間データの特定の側面にのみ着目して空間オブジェクトやオブジェクト間のさまざまな関係を記号表現しその上で推論する手法である [3], [4], [13], [15]。数値データを扱わないため、人間の認知にあった表現やその上での推論方法を与えるとともに、メモリや推論における計算量を削減

する。着目する性質としては、オブジェクトの形状、オブジェクト同士の相対的位置関係や方向関係、相対的距離や大きさなどがあり、これらを組み合わせたものも含め様々な体系が提案されている。本研究では曲線の形状に着目した QSR を考える。

著者らは、曲線を相対的方向と凸性を属性としてもつセグメントに分割し、セグメントの列として曲線の概形を記述する定性表現を提案した [18]。この表現上でセグメントの連結規則を定め、セグメント同士を連結して尖点を持たない円滑な曲線を得る推論方法を示した。これによって、2 次元平面上で離れた位置にあるセグメントの組とその相対

<sup>1</sup> 関西学院大学

1, Gakuen, Sanda, Hyogo, 669-1330, Japan

<sup>a)</sup> ktaka@kwansei.ac.jp

的方向関係が与えられたとき、間にセグメントを補間することでそれらを円滑な曲線でつなぐ経路が得られ、経路を構成する最小のセグメント数は 1 から 6 になることを示した [16]。一方、曲線を定性的に扱っているため、経路の 2 次元平面上への埋め込みは無限個存在し、その中には自己交差するものもある。また、埋め込みがらせん状になっていると、自然界のオブジェクトの境界線として現実的ではないため、そうならないように描画できるのが望ましい。

本発表では、冗長なものも含め任意の経路に対して、埋め込んだ曲線がらせん状にならないような埋め込み方が存在するかどうかについて議論する。セグメントの回転の向きに着目し経路全体の向きを考えることで、どのような埋め込みをしてもらせん状になってしまう経路を記号表現の上で判定する方法を示し、その正当性を証明する。

本稿は以下のように構成される。第 2 節では基本概念を説明するとともにセグメントの連結について述べる。第 3 節では 2 次元平面での埋め込みについて述べる。第 4 節ではらせん状にならない埋め込みが存在する記号列を判定する方法について述べる。第 5 節では関連研究と比較する。最後に第 6 節で結論を述べる。

## 2. セグメントの連結

### 2.1 基本概念

2 次元平面上の有向曲線のセグメントで、方向と曲率が一定であるようなものの集合を  $CURVES$  とする。 $CURVES$  の要素はその方向と凸性だけに注目しその形状を定性的に表す。正確なサイズや曲率は無視する。セグメントは単調増加または単調減少する曲線分とし、直線は扱わない。

$S_v = \{n, s\}$ ,  $S_h = \{e, w\}$ ,  $Conv = \{cx, cc\}$  および  $Dir = S_v \cup S_h$  とする。ここで、記号  $n, s, e, w$  はそれぞれ上, 下, 右, 左を表し,  $cx, cc$  はそれぞれ上に凸, 下に凸を表す。真横を向くものは  $n, s$  のいずれかに分類し、真上や真下を向くものは  $e, w$  のいずれかに分類する。

定義 1 (対称要素の割当)  $Dir \cup Conv$  上で対称となる要素を割り当てる関数  $i$  を定義する。

- $i(n) = s, i(s) = n$
- $i(e) = w, i(w) = e$
- $i(cx) = cc, i(cc) = cx$

任意の  $E \in Dir \cup Conv$  に対して  $i(i(E)) = E$  が成り立つ。

$X \in CURVES$  の定性的な形状を  $V \in S_v, H \in S_h, C \in Conv$  である 3 項組  $(V, H, C)$  で表す。これを  $X$  の定性表現と呼ぶ。 $X = (V, H, C)$  の 3 つの引数はそれぞれ上下方向, 左右方向, 凸性を表し, それぞれ  $dv(X), dh(X), cv(X)$  で参照される。

$X, Y \in CURVES$  に対して  $X = (V, H, C), Y = (V', H', C')$  をそれぞれ  $X, Y$  の定性表現とする。 $CURVES$  の上の関係  $\sim$  を  $V = V', H = H', C = C'$

が成り立つときのみ  $X \sim Y$  であると定義すると,  $\sim$  は  $CURVES$  上の同値関係になる。その結果,  $CURVES$  は 8 つの同値類に分割される。 $S = CURVES / \sim$  と定義する。

図 1 において, 左の 3 つは定性的に等しくこれらの定性表現は  $(n, e, cx)$  となる。それ以外の 2 つとはそれぞれ異なる見なす。

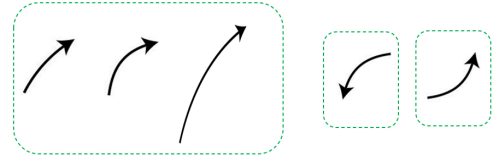


図 1 定性的な分類

$X \in S$  の始点と終点をそれぞれ  $init(X), term(X)$  と表記する。 $dir(X) = (dv(X), dh(X))$  は  $init(X)$  に対する  $term(X)$  の相対的方向を示す。

任意の  $X, Y \in S$  に対して,  $dv(X) = dv(Y)$  かつ  $dh(X) = dh(Y)$  のとき  $dir(X) = dir(Y)$  とする。 $dir(X) = dir(Y)$  かつ  $cv(X) = cv(Y)$  であるとき  $ssp(X, Y)$  と表記する。

$Y$  の  $X$  に対する相対的方向を表す関係  $rdir(X, Y)$  を導入する。

$rdir(X, Y)$  を  $V \in S_v, H \in S_h$  である 2 項組  $(V, H)$  で表す。 $rdir(X, Y)$  は  $term(X)$  に対する  $init(Y)$  の相対的方向を示す。

$rdir(X_1, Y_1) = (V_1, H_1), rdir(X_2, Y_2) = (V_2, H_2)$ ,  $dir(X) = (V, H)$  とおく。 $V_1 = V_2$  かつ  $H_1 = H_2$  のとき  $rdir(X_1, Y_1) = rdir(X_2, Y_2)$  とする。また,  $V_1 = V$  かつ  $H_1 = H$  のとき  $rdir(X_1, Y_1) = dir(X)$  とする。

### 2.2 直接連結

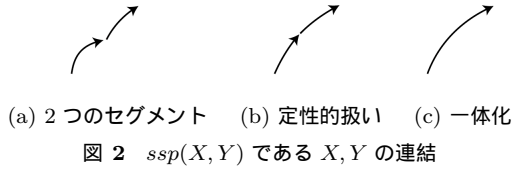
尖点を持たない連続で有限な有向曲線を  $scurve$  とよぶ。複数のセグメントを連結することで  $scurve$  を生成する。

$X, Y \in S$  に対して  $init(Y)$  と  $term(X)$  を同一視することで  $scurve$  が得られるとき,  $X$  と  $Y$  は直接連結可能であるといい,  $dc(X, Y)$  と記述する。また, 連結した結果を  $X \cdot Y$  と表す。

$dir(X \cdot Y)$  は  $init(X)$  に対する  $term(Y)$  の相対的方向を示し,  $V \in S_v, H \in S_h$  である 2 項組  $(V, H)$  で表す。

$X, Y$  の正確な曲率は無視するため,  $ssp(X, Y)$  の場合にはこの 2 つを連結して得られる新たな曲線は尖点を持たない単一セグメントと見なす (図 2)。したがって, このときは  $X \cdot Y = X'$ , ただし  $ssp(X, X')$  とする。

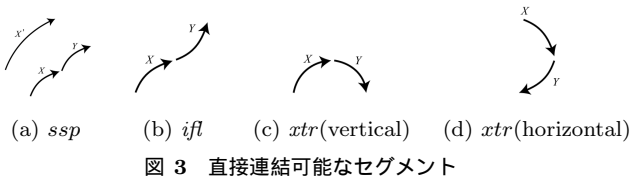
セグメントのペア  $X, Y$  は,  $ssp(X, Y)$  でなければ直接連結において変曲点 ( $ifl$ ) または極点 ( $xtr$ ) を形成する。 $ifl(X, Y)$  は  $X \cdot Y$  が変曲点を持つことを表し,  $xtr(X, Y, D)$  は,  $D \in S_v$  のとき,  $X \cdot Y$  が垂直方向に極点を持つこと



を表し,  $D \in S_h$  のとき,  $X \cdot Y$  が水平方向に極点を持つことを表す (図 3).

定義 2 (直接連結) •  $dc(X, Y)$  iff  $ssp(X, Y)$  or  $ifl(X, Y)$  or  $xtr(X, Y, D)$  ( $D \in Dir$ ).

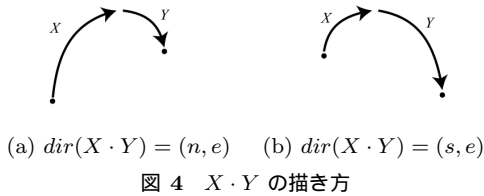
- $ifl(X, Y)$  iff  $X = (V, H, C)$  and  $Y = (V, H, i(C))$ .
- $xtr(X, Y, V)$  iff  $X = (V, H, C)$  and  $Y = (i(V), H, C)$ .
- $xtr(X, Y, H)$  iff  $X = (V, H, C)$  and  $Y = (V, i(H), i(C))$ .



$X, Y \in S$  に対して  $X \cdot Y$  に関する以下の性質が成り立つ.

- $ifl(X, Y) \Rightarrow dir(X \cdot Y) = dir(X) = dir(Y)$
- $xtr(X, Y, D) \wedge D \in S_v \Rightarrow dir(X \cdot Y) = (*, dh(X))$
- $xtr(X, Y, D) \wedge D \in S_h \Rightarrow dir(X \cdot Y) = (dv(X), *)$

ここで, ‘\*’ は非決定性を表す. たとえば,  $xtr(X, Y, D)$  ただし  $D \in S_v$  のとき,  $Y$  の描き方によってこの値は  $n$  または  $s$  になる (図 4). これは定性的扱いをしているためであり, このことから,  $dir(X \cdot Y) = dir(Y)$  を満たすような  $Y$  の描き方が存在することがわかる.



### 2.3 連結

$X, Y \in S$  が直接連結可能でない場合は,  $X$  と  $Y$  の間に  $S$  の要素を補間することで  $X, Y$  間の  $scurve$  を得る.

$X_1, \dots, X_n \in S$  ( $n \geq 2$ ) に対して  $X_j, X_{j+1}$  ( $\forall i; 1 \leq i \leq n-1$ ) が直接連結可能ならば,  $X_1, X_n$  は連結可能といい, 連結の結果得られる曲線を  $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  と表す.

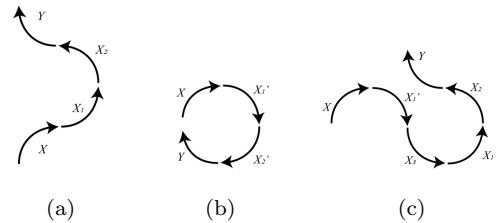
連結を表すオペレータ ‘ $\cdot$ ’ は結合律を満たす. すなわち,

任意の  $X, Y, Z \in S$  に対して  $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$  である.

定義 3 ( $X$  から  $Y$  への  $scurve$ )  $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  ( $n \geq 2$ ) ただし  $X = X_1, Y = X_n, X_{i-1} \neq X_i$  ( $\forall i; 2 \leq i \leq n$ ) に対して  $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  を  $X$  から  $Y$  への  $scurve$  とよび,  $X - Y$  と表す.

$scurve$   $X - Y$  の構成は無限個考えられる.

例 1  $X = (n, e, cx), Y = (n, w, cc)$  の場合の  $scurve$   $X - Y$  を考える.  $X_1 = (n, e, cc), X_2 = (n, w, cx)$  をとると,  $X \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot Y$  は  $scurve$   $X - Y$  になる (図 5(a)).  $X'_1 = (s, e, cx), X'_2 = (s, w, cc)$  をとると,  $X \cdot X'_1 \cdot X'_2 \cdot Y$  も  $scurve$   $X - Y$  になる (図 5(b)). さらに  $X_3 = (s, e, cc)$  をとると,  $X \cdot X'_1 \cdot X_3 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot Y$  も  $scurve$   $X - Y$  になる (図 5(c)).



定義 4 (単方向曲線)  $p = X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  ( $n \geq 2$ ) とする. すべての  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して  $dv(X_i)$  または  $dh(X_i)$  が同一のとき,  $p$  を単方向曲線という.

例 2 図 5(a) は単方向曲線である.

### 3. $scurve$ の 2 次元平面への埋め込み

#### 3.1 許容可能性

2次元平面上で任意の  $X, Y \in S$  を結ぶ  $scurve$  を求めることができる [16], [17]. 定性的な扱いにより, 得られた  $scurve$  の 2次元平面上での描き方は無限個存在する.

定義 5 (1) 2次元平面上の曲線  $X \in CURVES$  の定性表現を  $X \in S$  とするとき,  $X$  を  $X$  の埋め込みと呼ぶ.  $init(X), term(X)$  はそれぞれ 2次元平面上における  $X$  の始点と終点の位置を表す.

(2)  $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  を  $scurve$   $X_1 - X_n, X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を  $X_i$  の埋め込みとする. 任意の  $i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) に対して,  $term(X_i)$  と  $init(X_{i+1})$  が同一位置に配置されているとき,  $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  を  $scurve$   $X_1 - X_n$  の埋め込みという.

この  $scurve$  の埋め込みがらせん状になると, オブジェクトの境界線として現実的ではないため, そうならないように埋め込まれるのが望ましい. しかし, どのように埋め込んでもらえらせん状になる場合がある. 一般に, 曲線の回転角が  $2\pi$  以上ならばその曲線を 2次元平面上に埋め込んだときにはらせん状になることが知られており, ここで

は *scurve* を構成するセグメントの向きを導入することで *scurve* の埋め込みがらせん状になるかどうかについての議論を行い、記号列上でそれを判定する方法を示す。

まず、*scurve* に対する 開閉埋め込みを定義する。

**定義 6 (open, closed)** *scurve*  $X - Y$  の 2 次元平面への埋め込みに対して、 $X, Y$  の埋め込み部分の曲率を保持したままこの *scurve* の埋め込みを両方向に延長して得られる (無限) 曲線を考える。この曲線が自己交差しない場合、その埋め込みは開 (*open*) といい、自己交差する場合は閉 (*closed*) という。

**定義 7 (許容可能)** 開埋め込みが存在するときその *scurve* を許容可能 (*admissible*) という。また、*scurve* が空列の場合も許容可能とする。

**例 3** 図 6 はそれぞれ  $X = (n, e, cx)$ ,  $Z = (s, e, cx)$ ,  $Y = (s, w, cc)$  の場合の *scurve*  $X \cdot Z \cdot Y$  の開埋め込みと閉埋め込みを示している。開埋め込みが存在するので  $X \cdot Z \cdot Y$  は許容可能である。

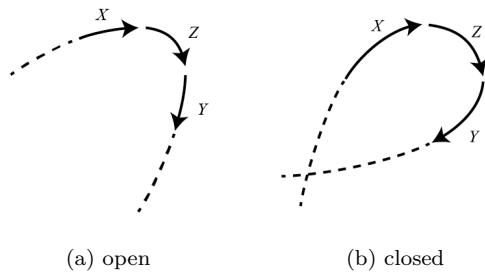


図 6  $X \cdot Z \cdot Y$  の 2 種類の埋め込み

**命題 1** 単方向曲線 は許容可能 である。

証明：

単方向曲線  $X_1 \dots X_n$  ( $n \geq 2$ ) の任意の埋め込みを考える。 $X_1$  および  $X_n$  をそれぞれ  $X_1$  および  $X_n$  の埋め込みとする。 $X_1, X_n$  の曲率を保持するようにこの *scurve* を両方向にそれぞれ延長すると、水平または垂直方向に両側に延長された曲線が得られる。この曲線は自己交差しない (図 8(b))。したがって、 $X_1 \dots X_n$  は許容可能である。

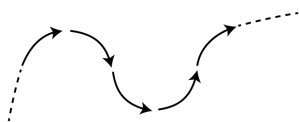


図 7 単方向曲線の開埋め込み

### 3.2 *scurve* の向き

$X \in S$  の向きとして時計回り (+)/半時計回り (-) を定義する。さらに、*scurve* の向きをそれを構成するセグメントの向きの列と定義する。

**定義 8 (向き)** •  $X \in S$  に対して

$orn(X) = '+'$  iff  $X = (n, e, cx), (s, e, cx), (s, w, cc)$  or  $(n, w, cc)$ ;  $orn(X) = '-'$  iff  $X = (s, w, cx), (s, e, cc), (n, e, cc)$  or  $(n, w, cx)$ .

•  $X_1, \dots, X_n \in S$  に対して

$orn(X_1 \dots X_n) = orn(X_1) \dots orn(X_n)$ .

**例 4** 例 3 において、 $orn(X \cdot Z \cdot Y) = +++$  である。

**定義 9 (向きの対称要素の割当)** 集合  $\{+, -\}$  の上で対称となる要素を割り当てる関数 *inv* を  $inv(+)=-, inv(-)=+$  と定義する。

**定義 10 (回転差)** *scurve*  $p$  に対して、 $orn(p)$  に出現する '+' と '-' の数の差を  $p$  の回転差 とよぶ。

$\sigma = s_1 \dots s_n$  ただし  $s_i \in \{+, -\}$  ( $\forall i; 1 \leq i \leq n$ ),  $dir(X_1) = (V, H)$  が与えられたとき、*dir* および *orn* の定義から  $orn(p) = \sigma$  となる *scurve*  $p = X_1 \dots X_n$  が一意的に定まる。したがって *scurve* の許容可能性はその向きを考えることで判定可能である。以下では *scurve* の向きを対象に議論する。

### 3.3 簡約

許容可能性を判定するために、*scurve* の向きを簡約する。簡約規則は 2 つあり、1 つは向きが  $+-+$  (または  $-+-$ ) の部分を  $+$  (または  $-$ ) で置き換えるもの、もう 1 つは  $++--$  (または  $--++$ ) の部分を空列  $\epsilon$  で置き換えるものである。

$\sigma_1, \sigma_2$  を向きの列、 $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{+, -\}$  とする。

(r1)  $s_1 = s_3 = inv(s_2)$  のとき、 $\sigma_1 s_1 s_2 s_3 s_2$  を  $\sigma_1 s_1 s_2$  と置き換える。

(r2)  $s_1 = s_2 = inv(s_3) = inv(s_4)$ , かつ、 $\sigma_1, \sigma_2 = \epsilon$  または  $\sigma_1, \sigma_2 \neq \epsilon$  のとき、 $\sigma_1 s_1 s_2 s_3 s_4 s_2$  を  $\sigma_1 s_2$  と置き換える。

**定義 11 (簡約形)** セグメントの向きの列  $\sigma$  の部分列に可能な限り (r1)(r2) を適用して得られる向きの列を  $\sigma$  の簡約形 と呼ぶ。

一般に、向きの列に対して簡約形は一意に定まらない。

**例 5**  $\sigma = +++--+-$  のとき、(r2) を先に適用すると簡約形は  $\epsilon$  となり、(r1) を先に適用すると簡約形は  $+-$  となる。

任意の向きの列  $\sigma$  およびその任意の簡約形に対して以下の性質が成り立つ。(3) は、任意の簡約形が、両端に 0 個以上 2 個以下の逆向きの記号によってはさまれた形かまたは空列であることを表す。

**命題 2** (1) (停止性)

簡約過程は停止する。

(2) (回転差保持)

簡約において回転差は保持される。

(3) (簡約形)

簡約形は、 $\sigma_2$  が向き  $s$  の 0 個以上の列、 $\sigma_1, \sigma_3$  が  $inv(s)$



の 0 個以上 2 個以下の列であるような  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  である .

証明 :

(1)(2)  $\sigma$  は有限列で列の長さは 1 回ごとに  $+$ ,  $-$  の組が 1 個, または 2 個減少するので明らか .

(3) 簡約形  $\sigma' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$  において  $\sigma_2$  が向き  $s$  の 0 個以上の列,  $\sigma_1, \sigma_3$  のいずれかが  $inv(s)$  の 3 個以上の列だとする . 一般性を失わずに  $\sigma_1 = - - -$  とすると, 2 つの場合が考えられる .  $\sigma' = - - - + + \dots$  とすると, (r2) が適用可能 .  $\sigma' = - - - + - \dots$  とすると, (r1) が適用可能 . いずれも簡約形の定義に反する . したがって,  $\sigma_1, \sigma_3$  はいずれも  $inv(s)$  の 0 個以上 2 個以下の記号列である .

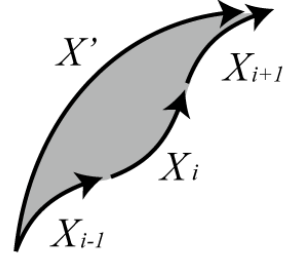


図 8 (r1) における 許容可能性保持

### 3.4 簡約における許容可能性の保持

まず, (r1) で許容可能性が保持されることを示す .

命題 3  $p = X_1 \dots X_n$  ( $n \geq 3$ ) とする .  $orn(X_{i-1}) = inv(orn(X_i)) = orn(X_{i+1})$  ( $\forall i; 2 \leq i \leq n-1$ ) のとき,  $ssp(X', X_{i-1})$  となる  $X'$  に対して  $p' = X_1 \dots X_{i-2} \cdot X' \cdot X_{i+2} \dots X_n$  も *scurve*  $X_1 - X_n$  となる . また,  $p'$  が許容可能ならそのときに限り  $p$  は許容可能である .

証明 :

$i = 2$  または  $i = n-1$  の場合は, (r1) の適用部分が *scurve* の端になるので, 規則適用後の連結を気にする必要はない . したがって, それ以外の場合を考える .  $ssp(X', X_{i-1}) \wedge ssp(X', X_{i+1})$  から  $i \neq 2$  ならば  $dc(X_{i-2}, X')$ ,  $i \neq n-1$  ならば  $dc(X', X_{i+2})$  がそれぞれ成り立つ . したがって  $p'$  も *scurve*  $X_1 - X_n$  となる .

次に,  $p$  が許容可能だとする .  $orn(X_{i-1}) = inv(orn(X_i)) = orn(X_{i+1})$  という条件から  $ifl(X_{i-1}, X_i)$  および  $ifl(X_i, X_{i+1})$  である . したがって  $dir(X_{i-1} \cdot X_i \cdot X_{i+1}) = dir(X_{i-1})$  が成り立つ .  $p$  の開埋め込みが存在するので,  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$  の曲率がいずれも十分小さくなるようにとったものを考える . その埋め込みに対して  $init(X') = init(X_{i-1})$  および  $term(X') = term(X_{i+1})$  を満たすように  $X'$  を描くことができる (図 8) . このとき  $X_1 \dots X_{i-2}, X_{i+2} \dots X_n$  の部分がいずれも図 8 の色付けした領域と交差しないように  $X'$  の曲率を十分小さくするように  $X'$  を描く . 直観的には, この領域が十分細くなるように  $X'$  を描くことに相当する . すると, これが  $p'$  の開埋め込みとなる .

逆に,  $p'$  が許容可能だとする .  $p'$  の開埋め込みで  $X'$  の曲率が十分小さいものを考える . この埋め込みに対して  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$  を曲率がいずれも十分小さくなるように描くことで  $p$  の開埋め込みを得る .

次に, (r2) で許容可能性が保持されることを示す .

命題 4  $p = X_1 \dots X_n$  ( $n \geq 4$ ) とする .  $orn(X_i) = orn(X_{i+1}) = inv(orn(X_{i+2})) = inv(orn(X_{i+3}))$  ( $\forall i; 2 \leq$

$i \leq n-4$ ) ならば  $p' = X_1 \dots X_{i-1} \cdot X_{i+4} \dots X_n$  も *scurve*  $X_1 - X_n$  となる . また,  $p'$  が許容可能ならそのときに限り  $p$  は許容可能である .

補題 1  $p = X_1 \dots X_n$  ( $n \geq 4$ ) とする .  $orn(X_i) = orn(X_{i+1}) = inv(orn(X_{i+2})) = inv(orn(X_{i+3}))$  ( $\forall i; 2 \leq i \leq n-4$ ) ならば  $dc(X_{i-1}, X_{i+4})$  である .

証明 :

表記をわかりやすくするため,  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, X_{i+3}, X_{i+4}$  をそれぞれ  $A, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, B$  とおく .

連結  $\alpha_1 \cdot \alpha_2, \alpha_2 \cdot \beta_1, \beta_1 \cdot \beta_2$  はそれぞれ極点, 変曲点, 極点を形成する .

$A = (V, H, C)$  とおく .

連結  $A \cdot \alpha_1$  は変曲点, または上下方向あるいは左右方向の極点を形成する . 連結  $\beta_1 \cdot B$  についても同様である . それぞれの場合について考察する . 図 9 は  $orn(\alpha_1) = orn(\alpha_2) = +, orn(\beta_1) = orn(\beta_2) = -$  としたときのそれぞれの場合を示している .

(1)  $A \cdot \alpha_1$  が変曲点を形成する, すなわち  $ifl(A, \alpha_1)$  とする . すると,  $\alpha_1 = (V, H, i(C))$  .

(a)  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$  が上下方向の極点を形成する場合

$\beta_1 \cdot \beta_2$  も上下方向の極点を形成するので,  $\alpha_2 = (i(V), H, i(C)), \beta_1 = (i(V), H, C), \beta_2 = (V, H, C)$  . このとき,  $\beta_2 \cdot B$  は左右方向の極点を形成するかまたは変曲点を形成する . 前者の場合,  $B = (V, i(H), i(C))$ , このとき  $xtr(A, B, H)$  となる (図 9(a)) . 後者の場合,  $B = (V, H, i(C))$ , このとき  $ifl(A, B)$  となる (図 9(b)) . いずれの場合も  $dc(A, B)$  が成り立つ .

(b)  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$  が左右方向の極点を形成する場合

$\beta_1 \cdot \beta_2$  も左右方向の極点を形成するので,  $\alpha_2 = (V, i(H), C), \beta_1 = (V, i(H), i(C)), \beta_2 = (V, H, C)$  . このとき,  $\beta_2 \cdot B$  は左右方向の極点を形成するかまたは変曲点を形成する . 前者の場合,  $B = (V, i(H), i(C))$ , このとき  $xtr(A, B, H)$  となる . 後者の場合,  $B = (V, H, i(C))$ , このと

き  $ifl(A, B)$  となる . いずれの場合も  $dc(A, B)$  が成り立つ .

(2)  $A \cdot \alpha_1$  が左右方向の極点を形成する , すなわち  $xtr(A, \alpha_1, H)$  とする . すると ,  $\alpha_1 = (V, i(H), i(C)), \alpha_2 = (i(V), i(H), i(C)), \beta_1 = (i(V), i(H), C), \beta_2 = (V, i(H), C)$  . このとき ,  $\beta_2, B$  は左右方向の極点を形成するかまたは変曲点を形成する . 前者の場合 ,  $B = (V, H, i(C))$  , このとき  $ifl(A, B)$  となる (図 9(c)) . 後者の場合 ,  $B = (V, i(H), i(C))$  , このとき  $xtr(A, B, H)$  となる (図 9(d)) . いずれの場合も  $dc(A, B)$  が成り立つ .

(3)  $A \cdot \alpha_1$  が上下方向の極点を形成する , すなわち  $xtr(A, \alpha_1, V)$  とする . (2)の場合と同様に証明できる . 以上により , すべての場合で  $dc(A, B)$  が成り立つ .

命題 4 の証明 :

補題から  $p'$  が *scurve* になることが示されたので ,  $p'$  が許容可能ならそのときに限り  $p$  は許容可能であることを示す .

( $\Leftarrow$ )

$p = X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  が許容可能だとする .  $A = (V, H, C)$  とおく .  $A \cdot \alpha_1$  が変曲点を形成する場合 (図 9(a)(b)) と極点を形成する場合 (図 9(c)(d)) がある .

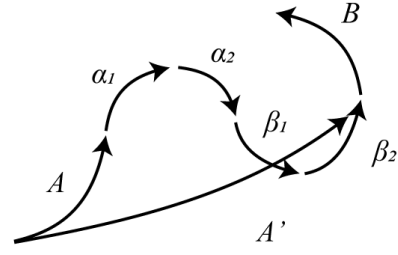
$p$  は許容可能なので  $dir(A \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2) = (V, H)$  となるような開埋め込みが存在する . そのような埋め込みに対して  $init(A') = init(A)$  ,  $term(A') = init(B)$  となるように  $A'$  を描くと  $dir(A') = (V, H)$  . このとき ,  $A \cdot \alpha_1$  が変曲点を形成する場合は  $A'$  のサイズは  $A$  よりも長くなり , 極点を形成する場合は短くなる .

また ,  $p$  の開埋め込みをとっていることから ,  $A, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, B$  以外は定性的な形を変えることなく移動またはセグメントのサイズを変更することで ,  $A'$  と交差しないように描くことができる . このように  $A'$  をとると ,  $A, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, B$  を  $A', B$  で置き換えることによって  $p'$  を得る . したがって ,  $p'$  の開埋め込みが存在するので ,  $p'$  は許容可能 .

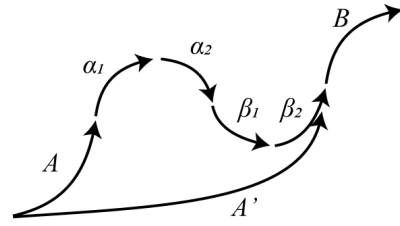
( $\Rightarrow$ )

$p' = X_1 \cdot \dots \cdot X_{i-1} \cdot X_{i+4} \cdot \dots \cdot X_n$  が許容可能だとする .  $orn(\alpha_1) = orn(\alpha_2) = inv(orn(\beta_1)) = inv(orn(\beta_2))$  であるような  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  をとり ,  $p = X_1 \cdot \dots \cdot X_{i-1} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot X_{i+4} \cdot \dots \cdot X_n$  を生成する .

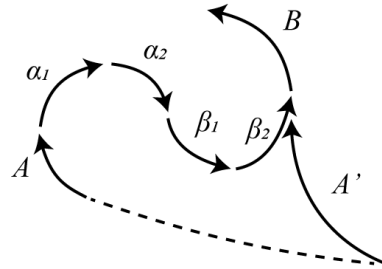
$p'$  は許容可能なのでその開埋め込みを考える . この埋め込みに対して  $term(X_{i-1})$  ,  $init(X_{i+4})$  の間に  $term(X_{i-1}) = init(\alpha_1)$  ,  $init(X_{i+4}) = term(\beta_2)$  となるように ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  をいずれも曲率が十分小さくなるように描くことで開埋め込みである  $p$  を得る . したがって ,  $p$  は許容可能 .



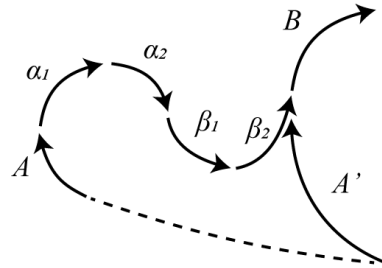
(a)  $ifl(A, \alpha_1) \wedge xtr(\beta_2, B, D), D \in S_h$



(b)  $ifl(A, \alpha_1) \wedge ifl(\beta_2, B)$



(c)  $xtr(A, \alpha_1, D) \wedge xtr(\beta_2, B, inv(D)), D \in S_h$



(d)  $xtr(A, \alpha_1, D) \wedge ifl(\beta_2, B), D \in S_h$

図 9 (r2) における 許容可能性保持

命題 3, 4 から , 簡約において許容可能性は保持される .

定義 12  $p, p'$  を *scurve* ,  $\sigma = orn(p), \sigma' = orn(p')$  とする .  $\sigma'$  が  $\sigma$  の簡約形るとき ,  $p'$  を  $p$  の簡約形という .

定理 1 (許容可能性保持) *scurve*  $p$  の許容可能性とその

簡約形  $p'$  の許容可能性は一致する .

(r2) において,  $\sigma_1, \sigma_2$  のいずれか一方のみが空列の場合,  $p$  と  $p'$  の許容可能性は必ずしも一致しない .

例 6 (1)  $p = X_1 \dots X_9$  ただし  $orn(p) = ++ + - - - + +$  とする .  $ord(p)$  に (r2) を適用して  $p' = X_1 \dots X_5$  をとると,  $orn(p') = ++++-$  . このとき,  $p$  は許容可能かつ  $p'$  は許容可能でない (図 10(a)) .

(2)  $p = X_1 \dots X_7$  ただし  $orn(p) = ++++--$  とする .  $orn(p)$  に (r2) を適用して  $p' = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$  をとると,  $orn(p') = +++$  . このとき,  $p$  は許容可能でないかつ  $p'$  は許容可能である (図 10(b)) .

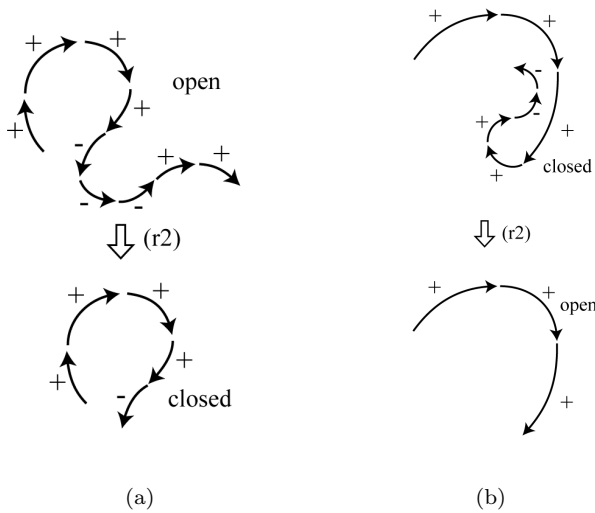


図 10 許容可能性が保持されない例

#### 4. 許容可能性判定

簡約によって任意の有限長 *scurve* の許容可能性判定は長さの短い *scurve* での許容可能性判定に帰着できる . 命題 2 により, 簡約形に出現する列の形には制約条件があるので, それを満たすもののみを考える . また, 向き  $+, -$  の対称性および *scurve* における順序の対称性を考え, 最低限の並び方の種類について考える .

一般に, 2次元平面上の曲線は回転角が  $2\pi$  以上になるとらせん状になり, 自己交差する場合があることが知られている . この性質を利用するために ‘定性的回転角’ という概念を導入する .

定義 13  $X \in S$  の 2次元平面上への埋め込みに関して,  $term(X)$  における接線が  $init(X)$  における接線に対してなす角を定性的回転角とよぶ .

定性的回転角の値は, セグメントの向きによって正負にわかれ, 絶対値は  $\pi/2$  以下である . *scurve* に含まれるセグメントで始点, 終点が連結においてともに極点を持つ場合, 任意の埋め込みにおけるそのセグメントの定性的回転

角は  $\pm\pi/2$  になる .

$k$  を *scurve*  $p$  の回転差とする .  $k \geq 4$  の場合,  $p$  に含まれるセグメントの定性的回転角の合計は  $2\pi$  以上になるので,  $p$  は許容可能でない . 以下では  $k \leq 3$  の場合について許容可能性を調べる .

与えられた *scurve* の簡約形を  $p = X_1 \dots X_n$  とおき,  $p$  の回転差を  $k$  とおく .

本節における以下の図は  $dir(X_1) = (n, e)$  の場合を例示している .

##### 4.1 セグメント数が 2 個以下

$n = 1$  または  $n = 2$  の場合,  $p$  は明らかに許容可能である .

##### 4.2 セグメント数が 3 個

以下の 2 つの場合が考えられる .

- (1)  $orn(p) = +++$  の場合 ( $k = 3$ ). 図 6(a) に示す開埋め込みが存在するので  $p$  は許容可能である .
- (2)  $orn(p) = ++-$  の場合 ( $k = 3$ ).  $p$  は単方向曲線なので命題 1 から許容可能である .

##### 4.3 セグメント数が 4 個

以下の 3 つの場合が考えられる .

- (1)  $orn(p) = +++-$  の場合 ( $k = 2$ ).  $xtr, xtr, ifl$  がこの順に  $p$  に出現する . ここで,  $p' = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$  については開埋め込みが存在するので, その埋め込みは  $p'$  が自己交差を持たないように  $term(X_3)$  の位置が決められる . また,  $X_3, X_4$  は変曲点を形成するのでその埋め込みに追加して  $p$  が自己交差を持たないように  $term(X_4)$  の位置が決められる (図 11(a)) . したがって  $p$  は許容可能である .
- (2)  $orn(p) = +-+-$  の場合 ( $k = 0$ ).  $p$  は単方向曲線なので (図 11(b)), 命題 1 から許容可能である .
- (3)  $orn(p) = -+-$  の場合 ( $k = 0$ ).  $p$  は単方向曲線なので (図 11(c)), 命題 1 から許容可能である .

##### 4.4 セグメント数が 5 個

以下の 3 つの場合が考えられる .

- (1)  $orn(p) = ++++-$  の場合 ( $k = 3$ ).  $xtr, xtr, xtr, ifl$  がこの順に  $p$  に出現する .  $dir(X_1) = (V, H, C)$ ,  $rdir(X_1, X_3) = (V_3, H_3)$ ,  $rdir(X_1, X_4) = (V_4, H_4)$  とする . すると  $X_1 \cdot X_2$  の極点が垂直方向か水平方向かによって  $V_3 = V_4 = i(V)$  または  $H_3 = H_4 = i(H)$  が成り立つ .  $V_3 = V_4 = i(V)$  の場合,  $X_5 = (V, i(H), C)$  が成り立つが,  $p$  をどのように埋め込んでも  $term(X_4)$  の位置から自己交差をもつ (図 12(a)) .  $H_3 = H_4 = i(H)$  の場合も同様である . したがって  $p$  は許容可能でない .
- (2)  $orn(p) = +++--$  の場合 ( $k = 1$ ).  $xtr, xtr, ifl, xtr$

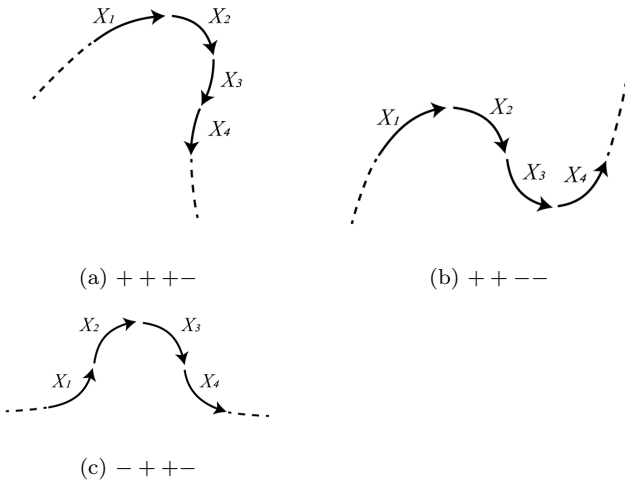


図 11 セグメント数 4 の *scurve* の埋め込み

がこの順に  $p$  に出現する.  $X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5$  は単方向曲線なので, この部分の埋め込みに  $X_1$  を追加する.  $term(X_4)$  の  $init(X_1)$  に関する相対的方向, すなわち  $dir(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4)$  を考えることで  $X_1$  と  $X_4$  が交差しないようにする.  $dir(X_1) = (V, H)$ ,  $dir(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4) = (V', H')$  とする.  $X_1 \cdot X_2$  が水平方向に極点をもつ場合,  $V = V'$  を満たすように  $X_1$  を描くことができる (図 12(b)).  $X_1 \cdot X_2$  が垂直方向に極点をもつ場合,  $H = H'$  を満たすように  $X_1$  を描くことができる (図 12(c)). いずれも  $p$  の開埋め込みになる (図 12(b)). したがって,  $p$  は許容可能である.

(3)  $orna(p) = +++--+$  の場合 ( $k = 1$ ).  $p$  は単方向曲線なので (図 11(c)), 命題 1 から許容可能である.

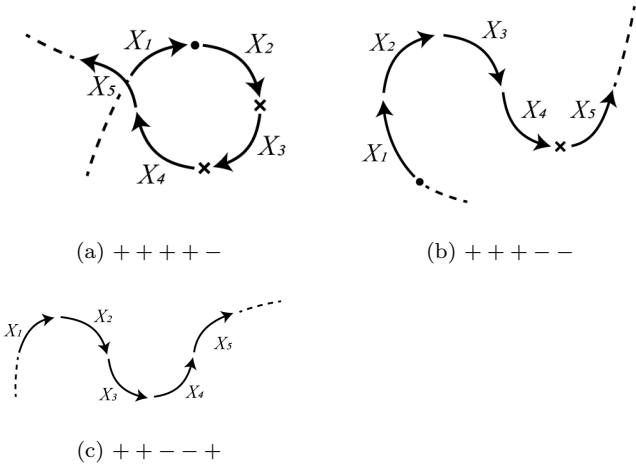


図 12 セグメント数 5 の *scurve* の埋め込み

#### 4.5 セグメント数が 6 個

以下の 4 つの場合が考えられる.

(1)  $orna(p) = +++++--$  の場合 ( $k = 2$ ).  $xtr, xtr, xtr, ifl, xtr$  がこの順に  $p$  に出現する.  $p' =$

$X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \cdot X_6$  とする. また,  $dir(X_1) = (V, H)$ ,  $dir(p') = (V', H')$  とする.  $X_1 \cdot X_2$  の極点が垂直方向か水平方向かによって  $V = i(V')$  または  $H = i(H')$  が成り立つ. いずれの場合も,  $p'$  の開埋め込みが存在するので, この埋め込みにおいて曲率が小さな  $X_1$  を描くことによって  $p$  の開埋め込みを得る (図 13(a)). したがって,  $p$  は許容可能である.

(2)  $orna(p) = +++--++$  の場合 ( $k = 2$ ).  $p$  は単方向曲線なので (図 13(b)), 命題 1 から許容可能である.

(3)  $orna(p) = -++++-$  の場合 ( $k = 2$ ).  $ifl, xtr, xtr, xtr, ifl$  がこの順に  $p$  に出現する.  $p' = X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5$  とする. また,  $dir(X_2) = (V, H)$ ,  $dir(p') = (V', H')$  とする.  $X_2 \cdot X_3$  の極点が垂直方向か水平方向かによって  $V = i(V')$  または  $H = i(H')$  を満たすように  $p'$  を描き, その両端に  $X_1, X_6$  をそれぞれ連結することで  $p$  の埋め込みを得る. このとき  $X_1, X_6$  の曲率を十分小さくすることで  $p$  の開埋め込みを得る (図 13(c)). したがって,  $p$  は許容可能である.

(4)  $orna(p) = +++--++$  の場合 ( $k = 0$ ).  $xtr, ifl, xtr, xtr, ifl$  がこの順に  $p$  に出現する. *scurve*  $p' = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5$  の開埋め込みが存在し, また,  $X_5$  と  $X_6$  は変曲点を形成するので,  $p$  の埋め込みが自己交差しないように  $X_6$  を描くことができる (図 13(d)). したがって,  $p$  は許容可能である.

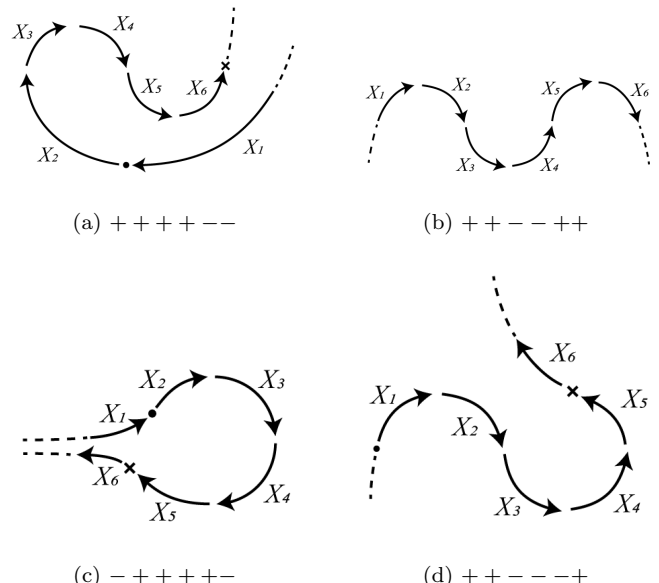


図 13 セグメント数 6 の *scurve* の埋め込み

#### 4.6 セグメント数が 7-11 個

同様に考えていくと以下のような結果を得る.

(1)  $n = 7$

(a)  $orna(p) = +++++--$  の場合 ( $k = 3$ ). 許容可

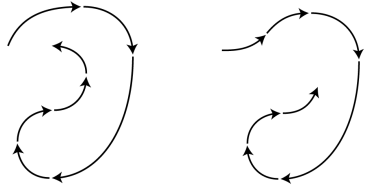


能でない (図 14(a)).

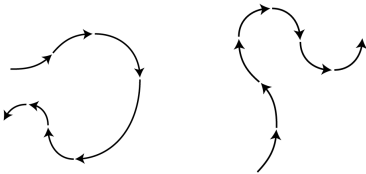
(b)  $orn(p) = -++++-$  の場合 ( $k = 3$ ). 許容可能でない (図 14(b)).

(c)  $orn(p) = -++++--$  の場合 ( $k = 1$ ). 許容可能である (図 14(c)).

(d)  $orn(p) = ---++++--$  の場合 ( $k = 1$ ). 許容可能である (図 14(d)).



(a)  $+++++--$  (b)  $-++++-$



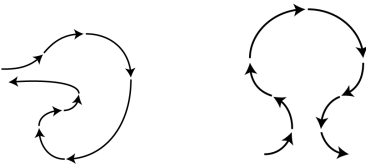
(c)  $-++++--$  (d)  $---++++--$

図 14 セグメント数 7 の *scurve* の埋め込み

(2)  $n = 8$

(a)  $orn(p) = -++++--$  の場合 ( $k = 2$ ). 許容可能である (図 15(a)).

(b)  $orn(p) = ---++++--$  の場合 ( $k = 2$ ). 許容可能である (図 15(b)).



(a)  $-++++--$  (b)  $---++++--$

図 15 セグメント数 8 の *scurve* の埋め込み

(3)  $n = 9$

(a)  $orn(p) = -+++++--$  の場合 ( $k = 3$ ). 許容可能でない (図 16(a)).

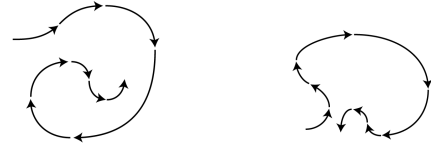
(b)  $orn(p) = ---+++++--$  の場合 ( $k = 1$ ). 許容可能である (図 15(b)).

(4)  $n = 10$

(a)  $orn(p) = ---+++++--$  の場合 ( $k = 2$ ). 許容可能である (図 17(a)).

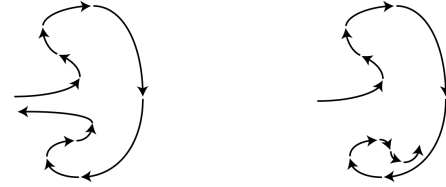
(5)  $n = 11$

(a)  $orn(p) = ---+++++--$  の場合 ( $k = 3$ ). 許容可能でない (図 17(b)).



(a)  $-+++++--$  (b)  $---+++++--$

図 16 セグメント数 9 の *scurve* の埋め込み



(a)  $---+++++--$  (b)  $---+++++--$

図 17 セグメント数 10,11 の *scurve* の埋め込み

#### 4.7 セグメント数が 12 個以上

向きの異なる要素は列の両端に高々 2 個しか存在しない。したがって  $n \geq 12$  の場合必ず  $k \geq 4$  になるので、どのような場合でも  $p$  の埋め込みは閉になる。したがって  $p$  は許容可能ではない。

#### 4.8 まとめ

$k \geq 3$  の場合、セグメント数が偶数のときはすべて許容可能になり、奇数のときはすべて許容可能でない。セグメント数が偶数のときは  $k$  の値は偶数なので、 $k \neq 3$  である。以上から、任意の有限長 *scurve* に対して、その向きの簡約形を調べることで許容可能性の判定ができる。

定理 2 (許容可能性判定)  $k$  を与えられた経路  $p$  の向きの回転差とする。  $k < 3$  ならばそのときに限り  $p$  は許容可能である。

### 5. 関連研究

曲線の埋め込みや自己交差点の有無については幾何学やグラフ理論などでも多く扱われる話題であるが、幾何学では曲率も含めた厳密な形状を対象としており、グラフ理論では連結性のみを問題としセグメントの凸性は無視している。QSR によるアプローチはこの中間に位置づけられるもので、人間が概形を認識しながら抽象レベルで推論できるような体系を与える。

QSR については多くの研究がなされているが、形状、特に曲線に着目したものは少ない。オブジェクトの境界線をセグメントに分割しそれを並べることでオブジェクトの形状を表した研究はいくつか見られる。Leyton は閉曲線を凸性をもとにセグメントに分割してセグメントを単位とする文法を定義し、曲線の変化を文法として扱った [8]。Tosue らはこれを拡張し閉曲線上の接点や閉曲線の分割も扱える

ようにした [19]. Galton らは曲線だけでなく直線や尖点も扱う独自の文法を提案し, 様々な形状を様々な抽象レベルで記号的に扱えることを示した [6]. Cabedo らは各セグメントに相対的な長さや角度の情報も加える表現方法を提案した [2]. これを拡張してオブジェクト領域を連結したときの形状を推論する体系も考案されている [1], [5], [12]. しかし, これらの研究はいずれも離れたところに配置されたオブジェクト同士の連結は扱っていない.

方向性に着目した QSR の体系はいくつか提案されている. Skiadopoulos らは領域同士の相対的方向を 2 項関係で表現した Cardinal Direction Calculus (CDC) を提案した [14]. Moratz らはオブジェクトの相対的方向を 3 項関係で表現した OPRA を提案した [10], [11]. OPRA では単位となるオブジェクトは始点と終点をもつベクトルであり, この意味では我々の形式化と OPRA は同じ特徴を持つ. ただし, OPRA の単位オブジェクトは属性として凸性を持っていないため, 連結によって円滑な曲線を生成するという応用はできない.

## 6. おわりに

本発表では, 著者らが提案した定性空間表現および推論体系において, セグメントを連結することで生成された円滑な曲線が 2 次元平面上でらせん状になるかどうかを判定する方法について議論した. その結果, セグメントの向きの列から判定できることを示した.

本発表における議論は, セグメントの向きの列および最初のセグメントが与えられたときに許容可能性を判定する方法について展開したものであり, 最初と最後のセグメントの相対的方向については考慮していない. 連結すべきセグメントの組の相対的方向も条件として与えられた場合の判定方法についての議論は今後の課題である. また, 簡約規則における条件の緩和を行うことで, より一般性の高いシステムに改良することが望まれる. さらに, 今回得られた結果をまとめて QSR の体系として整備するとともに, 証明の正しさを確認するために証明支援系などを使った検証を考えている.

謝辞 本研究は科研費 JP24K15096 の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] Cabedo, L. M., Abril, G., Morente, F. V. and Falomir, Z.: A pragmatic qualitative approach for juxtaposing shapes. *Journal of Universal Computer Science*, 16(11):1410–1424, 2010.
- [2] Cabedo, L. M. and Escrig, M. T.: A qualitative theory for shape representation and matching for design. In *Proceedings of the Sixteenth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI2004)*, pages 858–862, 2004.
- [3] Chen, J. et al.: A survey of qualitative spatial representations. *Knowledge Engineering Review*, 30:106–136, 2013.
- [4] Cohn, A. and Renz, J.: Qualitative spatial representation and reasoning. *Handbook of Knowledge Representation*, pages 551–596, Elsevier, 2008.
- [5] Falomir, A., Pich, A. and Costa, V.: Spatial reasoning about qualitative shape compositions. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 88(11):589–621, 2020.
- [6] Galton, A. and Meathrel, R.: Qualitative outline theory. *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1061–1066, 1999.
- [7] Kulik, L. and Egenhofer, M. J.: Linearized terrain: languages for silhouette representations. *Spatial Information Theory. Foundations of Geographic Information Science, International Conference, COSIT 2003*, pages 118–135, 2003.
- [8] Leyton, M.: A process-grammar for shape. *Artificial Intelligence*, 34:213–247, 1988.
- [9] Ligozat, G.: *Qualitative Spatial and Temporal Reasoning*. Wiley, 2011.
- [10] Moratz, R.: Representing relative direction as a binary relation of oriented points. In *Proceedings of the 17th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI2006)*, pages 407–411, 2004.
- [11] Mossakowski, T. and Moratz, R.: Qualitative reasoning about relative direction of oriented points. *Artificial Intelligence*, 180-181:34–45, 2012.
- [12] Pich, A. and Falomir, Z.: Logical composition of qualitative shapes applied to solve spatial reasoning tests. *Cognitive Systems Research*, 52:82–102, 2018.
- [13] Sioutis, M. and Wolter, D.: Qualitative spatial and temporal reasoning: current status and future challenges. In *Proceedings of the 30th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI2021)*, pages 4594–4601, 2021.
- [14] Skiadopoulos, S. and Koubarakis, M.: Composing cardinal direction relations. *Artificial Intelligence*, 152(2):143–171, 2004.
- [15] Stock, O.: *Spatial and Temporal Reasoning*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [16] Takahashi, K., Taniuchi, Y., Morita, R. and Kuroiwa, A.: Representation of Curves and Reasoning on Their Connection on a Two-Dimensional Plane Based on Qualitative Shape In *SIG-FPAI-128*, pages 57–62, 2024.
- [17] Takahashi, K.: Qualitative Formalization of a Curve on a Two-Dimensional Plane, In *16th International Conference on Spatial Information Theory (COSIT 2024)*, to appear.
- [18] Taniuchi, Y. and Takahashi, K.: Qualitative spatial representation and reasoning about fold strata. In *15th International Conference, ICAART 2023, Revised Selected Papers*, pages 244–266, 2024.
- [19] Tosue, M. and Takahashi, K.: Towards a qualitative reasoning on shape change and object division. In *14th International Conference on Spatial Information Theory (COSIT 2019)*, pages 7:1–7:15, 2019.