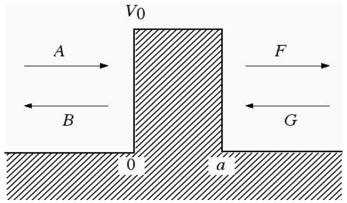
数式処理ートンネル効果ー

トンネル効果

量子効果の基礎的な例である1 次元のトンネル効果についての式を導こう（シッフ著 量子力学（井上 健訳），吉岡書店1970．小出昭一郎著 基礎物理学選書5A ー量子力学，裳華房1969．）．図のようなポテンシャルの壁に打ち寄せる電子の波を考える．したの記述を参考にして，透過率の式を導き，そのグラフを描け．



波動関数の表式

まず，ポテンシャルエネルギーV(x)=0の領域での波動方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=\varepsilon\varphi(x)$$

であるから，波動関数は

$x \geq 0$ では $\varphi(x)=A\exp(ikx)+B\exp(-ikx)$

$x \leq 0$ では $\varphi(x)=C\exp(ikx)$

となる．ここで$k=\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}$ は波数ベクトルの大きさ．

$\varepsilon \geq V_0$

ポテンシャルの壁の内側では波のエネルギーε とポテンシャルの高さV_0の大小によって事情が変わってくる．$\varepsilon \geq V_0$では$\kappa=\sqrt{\frac{2m(\varepsilon-V_0)}{\hbar^2}}$ と定義すると，波動関数は

$0 \leq x \leq a$では $\varphi(x)=F\exp(i\kappa x)+G\exp(-i\kappa x)$

となる．

波動関数は粒子の座標に関する滑らかな連続関数でなければならないという条件をx=0 と x=a に適用すると，条件はそれぞれ

x=0 で$\varphi(x)$が連続：A+B=F+G

x=0 で$\varphi'(x)$が連続：$k(A-B)=\kappa(F-G)$

x=a で$\varphi(x)$が連続：$F\exp(i\kappa a)+G\exp(-i\kappa a)=C\exp(ika)$

x=a &で$\varphi'(x)$が連続：$\kappa F\exp(i\kappa a)-\kappa G\exp(-i\kappa a)=kC\exp(ika)$

で与えられる．係数が5 個で，方程式が4 個だから，それぞれの係数の比だけが求まる．これらからF,G を消去して，B/A：入射波と反射波の複素振幅の比，およびC/A：入射波と透過波の複素振幅の比が求まる．これらの二乗が反射係数と透過係数にほかならない．結果は

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2=\left\{1+\frac{4k^2\kappa^2}{(k^2-\kappa^2)^2\sin(\kappa a)^2}\right\}^{-1}=\left\{1+\frac{4\varepsilon(\varepsilon-V_0)}{V_0^2\sin(\kappa a)^2}\right\}^{-1}$$

$$\left|\frac{C}{A}\right|^2=\left\{1+\frac{1}{4}\frac{(k^2-\kappa^2)^2\sin(\kappa a)^2}{k^2\kappa^2}\right\}^{-1}=\left\{1+\frac{1}{4}\frac{V_0^2\sin(\kappa a)^2}{\varepsilon(\varepsilon-V_0)}\right\}^{-1}$$

となる．

$0 \leq \varepsilon \leq V_0$

$0<\varepsilon<V_0$ならば，$\alpha=\sqrt{\frac{2m(V_0-\varepsilon)}{\hbar^2}}$ として波動関数は

$0 \leq x \leq$では $\varphi(x)=F\exp(\alpha x)+G\exp(-\alpha x)$

である．上と同様な計算によって

$$\left|\frac{C}{A}\right|^2=\left\{1+\frac{1}{4}\frac{V_0^2\sinh(\alpha a)^2}{\varepsilon(\varepsilon-V_0)}\right\}^{-1}$$

となる．$mV_0a^2/\hbar^2=8$の場合の透過率を求めると下図のようになります．エネルギーがポテンシャル障壁よりも小さい条件$|E/V_0|<1$でも透過波の比強度|C/A|^2が有限の値を取る現象がトンネル効果である．