

数値計算

2016/12/16 実施
(西谷@関学・理工・情報科学)

- [1] (数値解の収束性:25 点)

次の関数

$$f(x) = -3 \exp(-x) + \exp(-3x)$$

は $x = -1.0$ に解 $-1/2 \ln(3) = -.5493061445$ を持つ．二分法によって数値解を求めよ．
繰り返しは 10 回程度でいい．また，収束の様子を片対数 (logplot) でプロットせよ．

- [2] (Gauss-Seidel の収束性:25 点)

初期値を $[0, 0, 0]^t$ として， $A(tt)x = b$ にガウス・ザイデルによる連立一次方程式の反復解法プログラムを適用する．ただし，

$$A(tt) = \begin{pmatrix} 1 & tt & tt \\ tt & 1 & tt \\ tt & tt & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

である． $tt = 0.2, 0.5, 0.9$ に対して有効数字 6 桁の解を得るための反復回数を求めよ．(E. クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.89, 問題 2.3-9)

- [3] (FFT の強度表示:25 点) FFT によって非整合波の重ね合わせを周波数分解したときの様子を観察する．

1. $\cos\left(\frac{x}{15}\right)$ と $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ を重ね合わせた関数に FFT をかけて (スペクトル) 強度を周波数で表示せよ．
2. 上記 2 関数 $\cos\left(\frac{x}{15}\right)$ と $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ にさらに $\frac{1}{2} \cos(x)$ を重ね合わせた関数に FFT をかけて (スペクトル) 強度を周波数で表示せよ．
3. 上で求めた 1. 2. のスペクトル強度の違いをあげよ．

- [4] (正接 (tan) 関数のニュートンの差分商補間:25 点) 三角関数の正接 (tan) の $x = \pi/4 (= 0.7853982)$ における値は 1 になる．これをニュートンの差分商補間を用いて求める．ニュートンの内挿公式は，

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2] + \cdots + \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) f_n[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

である．ここで $f_i[\]$ は次のような関数を意味していて，

$$\begin{aligned} f_1[x_0, x_1] &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ f_2[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f_1[x_1, x_2] - f_1[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &\vdots \\ f_n[x_0, x_1, \cdots, x_n] &= \frac{f_{n-1}[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f_{n-1}[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

差分商と呼ばれる . $x_k = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ をそれぞれ選ぶと , 差分商補間のそれぞれの項は以下の通りとなる .

k	x_k	$y_k = F_0(x_k)$	$f_1[x_k, x_{k+1}]$	$f_2[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f_3[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	0.6	0.6841368	1.581516		
1	0.7	0.8422884	1.873506	1.459950	
2	0.8	1.029639	2.305190	ア	2.328233
3	0.9	1.260158			

それぞれの項は , 例えば ,

$$f_1[x_0, x_1, x_2] = \frac{1.873506 - 1.581516}{0.8 - 0.6} = 1.459950$$

で求められる . ニュートンの差分商の一次多項式の $xx = 0.7853982$ における値は

$$F(xx) = F_0(0.6) + (xx - x_0)f_1[x_1, x_0] = 0.6841368 + 1.581516(0.7853982 - 0.6) = 0.9773470$$

となる .

- 差分商補間の表中の開いている箇所 ア $f_2[x_1, x_2, x_3]$ を埋めよ .
- $xx = 0.7853982$ におけるニュートンの二次多項式の値を求めよ .

$$F(xx) = F(x_0) + (xx - x_0)f_1[x_0, x_1] + (xx - x_0)(xx - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2]$$

- 同様に $xx = 0.7853982$ におけるニュートンの三次多項式の値を求めよ .

ただし , ここでは有効数字 7 桁程度はとるように . (E. クライツィグ著「数値解析」(培風館, 2003), p.31, 例 4 改)