

情報科学のための数学演習 (線形代数) 試験問題

1. (p.25 例題 5) つぎの連立 1 次方程式を解き, 一般解を「特殊解と同伴な同次連立 1 次方程式の基本解の 1 次結合の和」の形で表せ. (25 点)

$$\begin{cases} x & -3y & -z & +2u & = & 3 \\ -x & +3y & +2z & -2u & = & 1 \\ -x & +3y & +4z & -2u & = & 9 \\ 2x & -6y & -5z & +4u & = & -6 \end{cases}$$

2. (p.60 例題 14) グラム・シュミットの直交化法により, 次のベクトルから \mathbb{R}^3 の正規直交基底を作れ. (25 点)

$$\mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0), \mathbf{x}_2 = (-1, 0, 1), \mathbf{x}_3 = (1, 1, 1)$$

3. (p.61 例題 15) (25 点)

(a) V を \mathbb{R}^n の部分空間とする.

$$V^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \text{すべての } \mathbf{y} \in V \text{ に対して } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}$$

は \mathbb{R}^n の部分空間になることを示せ (これを V の直交補空間という).

(b) $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}$ の直交補空間 V^\perp を求めよ.

4. (p.97 6.2-4.1(a)) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. \mathbb{R}^4 から \mathbb{R}^3 への線形写像 f を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で与えるとき, f の像 $\text{Im}f$ および核 $\text{Ker}f$ (ヌル空間) の次元と 1 組の基底を求めよ. (25 点)