

# 私の好きな数学者

～エヴァリスト・ガロアの生涯と功績について～

理工学部数理化学科

27014655：濱崎夏実

## 1 はじめに

あなたが一番好きな数学者は？ と問われると私は迷わずにエヴァリスト・ガロアであると答えるだろう。私にとってエヴァリスト・ガロアとは私が数学を好きになり、この数理科学科という学部に進学することに決めた要因を作った人物の一人である。このレポートを読むことで、そんなエヴァリスト・ガロアのことをたくさんの人に知ってほしい。

## 2 生涯



表1にエヴァリスト・ガロアの生涯年表を記した。

エヴァリスト・ガロアは1811年の十月、今からおよそ二百年前にパリ郊外のブル・ラ・レーヌ村で私立の寄宿学校を運営していたガロア家の長男として生まれた。ガロアの家は決して貧しいわけではなく、むしろ裕福な中流家庭であった。ガロアの母は当時では珍しく教養深い女性であり、ガロアは十一歳まで母親から基本的な知識を身に着けていたが、さらに進んだ教育を受けるためにリセ・ルイ＝ル＝グランに入学した。リセとは日本の高等学校に当たる教育機関で、特にルイ大王学院とも呼ばれるルイ＝ル＝グランは数多くあるリセの中でも名門であり、現在でもフランスのエリート教育に主導的な役割を果たしている。ガロアは最初の一年こそは成績も良かったものの、

段々勉強に身が入らなくなり、一年落第した学年でたまたま取った基礎数学の講義で数学に出会ってからは、勉強そっちのけで数学にのめり込んだ。ここで注意しておかなくてはならないのは、ガロアと数学の出会いがガロアが十五歳の時であったということである。

ところでガロアはこの在学中に初めての論文を書き上げている。それが「循環連分数に関する一定理の証明」(*Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodique*)である。この論文が注目されることは少ないが、この論文を執筆した1829年初頭から数年間のガロアの数学について代数幾何学・数論幾何学を専門とする研究者である加藤文元は自身の著書の中で

その最初の論文よりも、その論文の下馬評よりも、はるかに重要なステップを踏み出そうとしていた。

と述べている [1, p.103]。ガロアといえば後述するガロア理論で有名だが、この時期から1829年までに書き上げられた二つの論文、「代数学研究」(*Recherches algébriques*)と「素数次数の代数方程式についての研究」(*Recherches sur les équations algébriques de degré premier*)にはガロアの発想の決定的な部分が含まれていたといっても過言ではない。すなわちガロアは十代のうちに彼の理論の一番重大な部分を完成させていたのであり、そのことはある日高校生が数学の重要な原理をふと思いつくようなものなのであろう。それだけガロアは天才と呼ぶに値する青年だったのである。

ガロアといえば忘れてはならないのが、彼のその華々しいほどの才能が認められたのが彼の死後であるということであろう。どうりで年表を見てもパツとしないわけである。このことに関してオーギュスタン＝ルイ・コーシーの名前が挙げられるだろう。コーシーの若い才能への無関心はガロアに限らずよくあったことであるらしいが、加藤は、

後年の研究によって、実はコーシーはこの論文をかなりしっかりと読み、かなり高い評価を与えていたらしいということが明らかになっている。

と述べている [1, p.108]。コーシーはどうやらガロアに論文の書き直しを勧めたり、それ以外にも――特にリセで成績が悪かったガロアが師範学校へ進学する際には気を使ってやったようである。しかしコーシーが自分の研究にかかりっきりで若手の育成には興味がなかったのは事実らしいので、それだけガロアの場合は異例で、コーシーは他の者にはなかった可能性をガロアの中に見出したのかもしれない。

また、ガロアのことを知るためには彼の生きた躍動の1830年台という時代を知っておかなくてはならない。1830年台はとにかく市民革命の多い時期であった。七月革命から始まり、栄光の三日間、七月体制。ガロアもこの革命の波に飲まれていくことになる。ガロアはルイ＝ル＝グランから進学した高等師範学校で共産主義者のオーギュスト・シュヴァリエに出会い、その影響から

七月革命に参加しようとするが学校側から止められてしまい、結局参加することは叶わなかった。そのことに反発を覚えたガロアは学校に対する他の不満も相まって急性共和派の秘密結社「民衆の友の会」に加わり、段々とその活動に参加するようになっていく。そのため警察に目をつけられて学校も退学、ついには逮捕され、禁固六ヶ月の刑を宣告された。しかし、パリ市内でコレラが流行したため刑期を一月残したままで出所を許された。たが何らかの理由で決闘をし二十年の人生を閉じることとなる。決闘の理由としては陰謀説や自殺説、恋愛説など諸説あるが、本当の理由は未だ明かされていない。このようにしてガロアは短すぎる二十年の人生の幕を閉じた。

表 1: エヴァリスト・ガロアの生涯年表

年	出来事
1811	パリ郊外のブル＝ラ＝レーヌ村に生まれる
1829	論文『循環連分数による一定理の証明』を発表する 高等師範学校入学
1830	急進共和派の秘密結社「民衆と友の会」へ参加
1831	師範学校退学後、投獄される
1832	仮釈放されるが腹膜炎のため死亡

### 3 ガロア理論

たとえば二次方程式の解の公式は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

であらわせる。同様に三次方程式、四次方程式にも一般解が存在するということはガロアが数学と出会ったころにはすでにわかっていた。そこでガロアは五次方程式の一般解が存在しないことを群という考え方をを用いて示すことに成功した。しかし、ガロア理論というのは単に五次方程式がべき根で解けないというのを示しただけではない。ガロアは彼自身の「群」(ガロア群)の定義から代数方程式を解く際に、新しい視点を用いようと考えた。四則演算だけでは得られない数を添加していき、有理的に既知な数の範囲を広げる事により求めたい根をその範囲の中に収めてしまえばよい。方程式の解たるべき根が解けるための条件をこの群の考えを用いて考えて見る、これがガロア理論なのである。ニールス・アーベルは五次以上の方程式にべき根と四則

演算だけでかけるような一般解がないことについて初めて正確な証明を与えたが、その証明とは異なった切り口でもってガロアもこの事の証明に成功したのである。また、ガロア理論はこのことにとどまらない数学全体のパラダイムに関わるものなのではないだろうか。加藤は、

「ガロア理論」とは、数学全体の難しさを、それに付随した対称性全体から成るシステムの構造によって記述する学問である。

と述べている [1, p.245]。ガロア理論は現代までの数学の世界をその対称性でもって支える考えである。

ここにガロアの残した偉大な業績の一つであるガロア理論の基本定理をここに記す：

$E/F$  を、ガロア群  $G = Gal(E/F)$  をもつガロア拡大とする。

1.  $H \mapsto E^H$  で定義される写像  $\gamma : Sub(G) \rightarrow Lat(E/F)$  は順序を逆にする全単射になり、 $\gamma$  の逆は  $\delta : B \mapsto Gal(E/B)$  である。
2.  $E^{Gal(E/B)} = B$  と  $Gal(E/E^H) = H$  が成り立つ。
3.  $E^{H \vee K} = E^H \cap E^K$   
 $E^{H \cup K} = E^E \vee E^K$   
 $Gal(E/B \vee C) = Gal(E/B) \cap Gal(E/C)$   
 $Gal(E/B \cap C) = Gal(E/B) \vee Gal(E/C)$
4.  $[B : F] = [G : Gal(E/B)]$  と  $[G : H] = [E^H : F]$  が成り立つ。
5.  $B/F$  がガロア拡大になるための必要十分条件は、 $Gal(E/B)$  が  $G$  の正規部分群になることである。

## 4 最後に

エヴァリスト・ガロアは若くしてなくなった天才数学者でありながらその業績は死後に認められ、その考えは今現代においても数学の基礎を支える重要な役割を担っている。彼の激動の二十年間を思うと私も気が引き締まる思いになる。彼の死没から約二十年、遥かに恵まれた時代に生きる我々こそが彼の意思を受け継ぎ、更なる数学の発展に貢献しなければならないと思う。

## 参考文献

- [1] 加藤 文元、『ガロア—天才数学者の生涯』(中央公論新社〈中公新書〉, 2010).

- [2] ロスマン, ジョセフ『ガロア理論』(関口 次郎訳, シュプリンクラー・フェアラーク東京株式会社, 1998)
- [3] 「エヴァリスト・ガロア」〈<http://ja.wikipedia.org/wiki/エヴァリスト・ガロア>〉(2015年1月5日アクセス)
- [4] 「ガロア理論」〈<http://ja.wikipedia.org/wiki/ガロア理論>〉(2015年1月5日アクセス)