確率分布の平均と分散

- 二項分布 B(n,p)
- ポアソン分布 P(λ)
- 正規分布 N(μ,σ²)

二項分布 B(n,p)(k)の平均

$$E(X)=\sum_i x_i\cdot p_i=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\ldots=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\cdot p\cdot p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\cdot p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\cdot\sum_{k-1=0}^{n-1}B(n-1,p)(k-1)=np$$

二項分布 B(n,p)(k)の分散

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdots=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k(1-p)^{n-k}-(np)^2$$

$$=np\cdot\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\cdot p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}-(np)^2$$

$$=np\cdot\sum_{k-1=0}^{n-1}((k-1)+1)\cdot B(n-1,p)(k-1)-(np)^2$$

$$=np((n-1)p+1)-(np)^2=np(1-p)$$

ポアソン分布の平均と分散を求めるための補題(その1)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\left(1\cdot\frac{\lambda^0}{1}+2\cdot\frac{\lambda}{2!}+3\cdot\frac{\lambda^2}{3!}+\cdots\right)$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right)=e^{-\lambda}\lambda\, e^{\lambda}=\lambda$$

$$e^x=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

ポアソン分布の平均と分散を求めるための補題(その2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^{k-2}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \left(1\cdot 0\cdot\frac{\lambda^{-1}}{1!} + 2\cdot 1\cdot\frac{\lambda^0}{2!} + 3\cdot 2\cdot\frac{\lambda}{3!} + 4\cdot 3\cdot\frac{\lambda^2}{4!} + \cdots\right)$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \left(0 + 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots\right) = e^{-\lambda}\lambda^2\, e^{\lambda} = \lambda^2$$

ポアソン分布の平均

$$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 1, \cdots, \infty)$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

補題(その1)より

ポアソン分布の分散

$$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 1,\cdots,\infty)$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{\infty}(k-\lambda)^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty}(k^2 - 2k\lambda + \lambda^2)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1) + k(1-2\lambda) + \lambda^2)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1-2\lambda) + \lambda^2 = \lambda$$

補題(その1)
&(その2)より

中心極限定理

- 独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が
  平均 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$、
  分散 $\sigma^2{}_1, \sigma^2{}_2, \ldots, \sigma^2{}_n$の
  「任意の」分布に従うとき、合成確率変数

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}}$$

の分布は n→∞ で正規分布に近づく

中心極限定理 (2)

- ある確率変数が他の無数の変動要因によって影響され、

近似的に

「その変数は正規分布すると考えられる」