平均

- 確率変数 X の「平均」(mean)

「離散型確率分布の場合」

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$$

平均 (2)

- 確率変数 X の「　　　」(　　　)

「連続型確率分布の場合」

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

☆

平均 (3)

- 平均とは
  -

  ⇒ 「　　　」(　　　　　　　)

  - 2乗誤差(下式)を最小化するμ

分散

- 確率変数 X の「分散」(variance)

「離散型確率分布の場合」

$$V(X) = E((x - E(X))^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (x_i - E(X))^2 p_i$$

分散 (2)

- 確率変数 X の「　　　　」(　　　　　)
  「連続型確率分布の場合」

$$V(X) = E((x - E(X))^2)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx$$

分散 (3)

-
-

⇒ 「　　　　　　　　　　　　　　」

$$V(X) = \min_t \int_{-\infty}^{\infty} (x - t)^2 \cdot f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx$$

平均と分散

- 平均とは2乗誤差を最小化する値

⇒「　　　　　　　　」「　　　　　　　　」

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

- 分散とはそのときの最小2乗誤差の値

⇒「　　　　　　　　　　　　　　　　」

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty} (x-E(X))^2\cdot f(x)\,dx$$

平均と分散 (2)

- 確率変数 aX+b の平均 (a, b は定数)

$$E(aX+b)=\int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\cdot f(x)\,dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx+b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$=$$

平均と分散 (3)

- 確率変数 aX+b の分散 (a, b は定数)

$$
\begin{aligned}
&V(aX+b)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b-aE(X)-b)^2\cdot f(x)\,dx\\
&=a^2\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot f(x)\,dx\\
&=
\end{aligned}
$$

平均と分散 (4)

- 独立性
  - 独立な確率変数 X と Y に対し次式が成立

$$
\begin{aligned}
&h(x,y)=f(x)g(y)\\
&\quad h(x,y)\\
&\qquad f(x)\\
&\qquad g(y)
\end{aligned}
$$

平均と分散 (5)

- 確率変数 X+Y の平均 (X, Y は独立)

$$E(X+Y)=\int\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)h(x,y)\,dxdy$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x)g(y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dy+\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot g(y)\,dx$$

$$=$$

$$=$$

平均と分散 (6)

- 確率変数 X+Y の分散 (X, Y は独立)

$$V(X+Y)$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}(x+y-(\mu_x+\mu_y))^2\cdot h(x,y)\,dxdy$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}\{(x^2+y^2+(\mu_x+\mu_y)^2+2xy-2x(\mu_x+\mu_y)-2y(\mu_x+\mu_y))\}\cdot h(x,y)\,dxdy$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}\{(x-\mu_x)^2+(y-\mu_y)^2+(x-\mu_x)(y-\mu_y)\}\cdot h(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_y)^2g(y)\,dy+\int\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)h(x,y)\,dxdy$$

$$=$$

$$=$$

平均と分散 (7)

- 確率変数 X-Y の分散 (X, Y は独立)

$$
\begin{aligned}
&V(X-Y)\\
&=\iint_{-\infty}^{\infty}(x-y-(\mu_x-\mu_y))^2\cdot h(x,y)\,dxdy\\
&=\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{(x^2+y^2+(\mu_x-\mu_y)^2-2xy-2x(\mu_x+\mu_y)+2y(\mu_x+\mu_y))\right\}\cdot h(x,y)\,dxdy\\
&=\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{(x-\mu_x)^2+(y-\mu_y)^2-(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right\}\cdot h(x,y)\,dxdy\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_y)^2 g(y)\,dy-\iint_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)h(x,y)\,dxdy\\
&=\\
&=
\end{aligned}
$$

平均と分散 (8)

- 正規分布 N(μ,σ²)の平均と分散