微分(応用,自由課題)

全微分

級数展開

Taylor級数は以下のようにして，中心点，次数を指定する．

```
> t1:=series(f(x),x=a,4);
```

$$t1 := f(a) + D(f)(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^{(2)}(f)(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} D^{(3)}(f)(a)(x-a)^3 + O\left((x-a)^4\right) \quad (1.2.1)$$

これでは関数などに指定することができないので，convertを使って多項式(polynomial)に変換しておく．

```
> convert(t1,polynom);
```

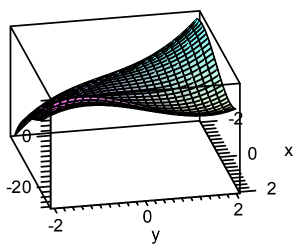
$$f(a) + D(f)(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^{(2)}(f)(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} D^{(3)}(f)(a)(x-a)^3 \quad (1.2.2)$$

例題

次の関数の極値を求めよ．

f(x,y)=x^3+y^3-3xy

```
> f:=(x,y)->x^3+y^3-3*x*y:
  plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2);
```



f_x=0, f_y=0を連立方程式とみなして解く．

```
> eq:={diff(f(x,y),x)=0,diff(f(x,y),y)=0};
  solve(eq,{x,y});
```

$$eq := \{3x^2 - 3y = 0, 3y^2 - 3x = 0\}$$

$$\{y=0, x=0\}, \{y=1, x=1\}, \{y=-1-\mathrm{RootOf}(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L2), x=\mathrm{RootOf}(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L2)\} \quad (2.1)$$

判別式をDD(x,y)として定義．

```
> DD:=unapply(diff(f(x,y),x,y)*diff(f(x,y),x,y)-diff(f(x,y),x,x)*diff(f(x,y),y,y),x,y);
```

$$DD := (x,y) \to 9 - 36xy \quad (2.2)$$

D<0, f_xx>0ならば極小値．

```
> DD(0,0);
  DD(1,1);subs({x=0,y=0},diff(f(x,y),x,x));
```

$$9$$

$$-27$$

$$0 \quad (2.3)$$

演習

f(x,y)=e^x*log(1+y)をx=0,y=0のまわりで3次まで展開せよ．

f(x,y)=xy(x^2+y^2-1)の極値を求めよ．

おまけ

以下のようにすると表示がきれい．

```
> f:=unapply(x^4*exp(-y^2),(x,y));d:=Diff(f(x,y),x);
```

$$f := (x,y) \to x^4 e^{-y^2}$$

$$d := \frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 e^{-y^2}\right) \quad (4.1)$$

```
> d=value(d);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 e^{-y^2}\right) = 4x^3 e^{-y^2} \quad (4.2)$$