数式処理(演習：2)

例題：1次変換と直線

行列$A=\begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{bmatrix}$の表わす1次変換$f$によって，直線 $2x\text{-}y\text{-}2=0$が直線 $3x\text{-}4y+10=0$ に移されるとき，a, b の値を求めよ．

解答例

```
> restart;with(LinearAlgebra):
  A:=Matrix(2,2,[[a,3],[4,b]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{bmatrix} \tag{1.1.1.1}$$

直線 $2x-y-2=0$上の点を媒介変数tを用いて表わす．

```
> X:=Vector([t,2*t-2]);
```

$$X := \begin{bmatrix} t \\ 2t-2 \end{bmatrix} \tag{1.1.1.2}$$

行列によって変換された後の点(x',y')は，

```
> (A.X);
```

$$\begin{bmatrix} a t+6t-6 \\ 4t+b(2t-2) \end{bmatrix} \tag{1.1.1.3}$$

この点が直線 3x-4y+10=0 上にあるから，先程求めた，(x',y')を代入する．

```
> Eq1:=3*(A.X)[1]-4*(A.X)[2]+10=0;
```

$$Eq1 := 3at+2t-8-4b(2t-2)=0 \tag{1.1.1.4}$$

tについて整理すると，

```
> collect(Eq1,t);
```

$$(3a+2-8b)t-8+8b=0 \tag{1.1.1.5}$$

これがtによらずに成立するためには，恒等式でなければならない．tの0，1次の係数を取り出す．

```
> Eq2:={coeff(lhs(Eq1),t,1)=0,
  coeff(lhs(Eq1),t,0)=0};
```

$$Eq2 := \{3a+2-8b=0, -8+8b=0\} \tag{1.1.1.6}$$

a,bについて解く．

```
> solve(Eq2,{a,b});
```

$$\{b=1, a=2\} \tag{1.1.1.7}$$

課題

行列$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$の表わす1次変換fによって，自分自身に移る直線の方程式を求めよ．

課題：行列の対角化

1 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$の固有値を求めよ．

2 固有ベクトルで作られる行列をPとおくとき，P^(-1).A.Pを求めよ．

3 A^n (nは自然数)を求めよ．

例題：行列のスペクトル分解

一般に，2次の正方行列Aが異なる2つの固有値a,bを持つとき，

$aP + bQ=A, P+Q=E$

を満たす行列P,Qに対して，次の事が成り立つ．

（1） $PQ=QP=0,$

（2） P^2=$P,$

（3） Q^2=Q

上のようにに行列を分解することをスペクトル分解という．

また，A^n=(aP+bQ)^n = a^nP+ b^nQ

となる．

$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$に対して，行列$P, Q$を求めよ．

解答例

行列のまま変形するのが難しそうなので解答例を示す．みそは，「初めは，未知変数とみなして連立方程式を解いておいて，後から，行列要素を入れる(subs)．」

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  A:=Matrix(2,2,[[4,2],[1,3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.3.1.1}$$

```
> l,V:=Eigenvectors(A);
```

$$l, V := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.1.2}$$

```
> s1:=solve({l[1]*P+l[2]*Q=AA,P+Q=EE},{P,Q});
```

$$s1 := \left\{P=\frac{5}{3}EE-\frac{1}{3}AA, Q=-\frac{2}{3}EE+\frac{1}{3}AA\right\} \tag{1.3.1.3}$$

```
> E:=Matrix(2,2,shape=identity);
```

```
P:=simplify(subs({EE=E,AA=A},rhs(s1[1])));
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad (1.3.1.4)$$

以下略

課題

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ に対して，スペクトル分解した行列P, Qを求めよ．
また，$PQ = QP = 0, P^n = P, Q^n = Q$が成り立つことを確かめよ．
さらにAの逆行列を$cP+dQ$と表わしたとき，実数c, dを求めよ．

課題：微分

2曲線 $y = x^3 - 2x + 1, y = x^2 + 2ax + 1$ が接するとき，aの値を求めよ．また，その接点における共通の接線の方程式を求めよ．

課題：積分

関数$f(x)$が$f(x) = 2x + \int_0^1 (x+t) f(t)\, dt$を満たすとき，$f(x)$を求めよ．