線形代数ー固有値ー

Copyright @2006 by Shigeto R. Nishitani

固有値(Eigenvalues)と固有ベクトル(Determinant)

MatrixInverseと同様にLinearAlgebraを呼び出しておく.

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

固有値だけが知りたいときには, 以下の通り.

```
> A0 := Matrix(2, 2, [[1,2], [2,1]]);
  Eigenvalues(A0);
```

$$A0 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

固有ベクトルと共に取り出すにはEigenvectorsを使う. 下の例では, 浮動小数点に直し, 固有値(lambda:l)と固有ベクトル(v)とに代入している.

```
> A1:= Matrix(2, 2, [[1,2], [3,4]]);
  (l,v):=evalf(Eigenvectors(A1));
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$l, v := \begin{bmatrix} 5.372281324 \\ -.372281324 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.4574271076 & -1.457427107 \\ 1. & 1. \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

行列の行を要素とするベクトルColumnを使って, 一番目の固有値に対応する固有ベクトルを取り出す.
これを使って, 固有値, 固有ベクトルの関係
A1.v=l.v
を確認する.

```
> Column(v,1);
  A1.Column(v,1);
  l[1]*Column(v,1);
```

$$\begin{bmatrix} 0.4574271076 \\ 1. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.45742710760000004 \\ 5.37228132280000014 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.45742710725081847 \\ 5.37228132400000024 \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

例題

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有多項式 $|A-\lambda * E|$ から固有値を求めよ.
これをEigenvectorsで得られた結果と比べよ.
さらに固有値・固有ベクトルの定義A.v=l.vを確認せよ.

```
> A:=Matrix(2,2,[[1,2],[2,1]]):
  A1:=A-lambda*Matrix(2,2,shape=identity);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

```
> Determinant(A1);
```

$$-3-2\lambda+\lambda^2 \quad (2.2)$$

```
> solve(Determinant(A1),lambda);
```

$$3, -1 \quad (2.3)$$

```
> (l,v):=Eigenvectors(A);
```

$$l, v := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

```
> l[1].Column(v,1):
  A.Column(v,1): #出力略
```

2番目についても同様.

演習

次行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ で例題とおなじ項目を確認せよ.